פרק 9. לינאריזציה גלובאלית

נתבונן במודל לא-לינארי במרחב המצב, אשר מייצג את המערכת המבוקרת:

$$\dot{x} = f(x,u)$$
$$y = h(x)$$

נניח כי המצב כולו ניתן למדידה. נתבונן, לשם קונקרטיות, בבעיית העקיבה: עבור כניסת ייחוס r, מטרתנו למצוא בקר משוב מהצורה $u = k(x,r)$ כך שהיציאה תעקוב אחר הכניסה, כמובן תוך שמירה על יציבות המערכת כולה.

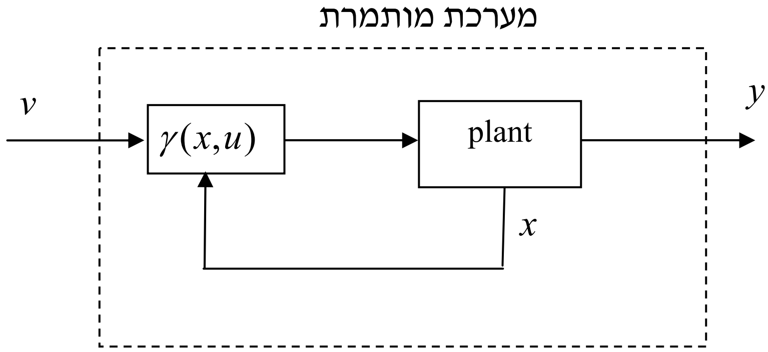
הרעיון בלינאריזציית משוב הוא "להפוך" את המערכת המבוקרת למערכת לינארית, ולתכנן בקר מתאים עבור מערכת זו.

לצורך "הפיכה" זו, ניתן להשתמש בשני כלים:

א. טרנספורמציה (לא לינארית) של משתני המצב: $z = T(x)$. בד"כ נדרוש כי T תהיה הפיכה, ותקיים תכונות "חלקות" (רציפות וגזירות) מתאימות.

ב. טרנספורמציה של אות הכניסה: $u = \gamma(x,v)$, כאשר v הינו אות כניסה חדש (שהינו חלק מהבקר). הצבה זו נותנת מערכת חדשה ("המערכת המותמרת") עם הכניסה v, דהיינו: $\dot{x} = f(x,\gamma(x,v)),\ \ y = h(x)$.

טרנספורמציה זו מודגמת בציור הבא:



על ידי שילוב שתי טרנספורמציות אלו ניתן לעיתים לקבל מערכת שהיא לינארית מבחינת הקשר כניסה-יציאה, או אף מערכת מצב לינארית: $\dot{z} = Az + bv,\ \ y = Cz$.

ניתן עתה לתכנן בקר לינארי עבור מערכת זו (שישיג עקיבה רצויה של y אחרי r), למשל בקר משוב-מצב לינארי מהצורה $v = Kz + \alpha r$. הבקר המלא עבור המערכת המקורית יתקבל עתה לפי:

$$u = \gamma(x,v) = \gamma(x, KT(x) + \alpha r) := k(x,r)$$

9.1. לינאריזצית מצב

נתבונן ראשית במקרה שבו מטרתנו להביא לקשר לינארי בין הכניסה למצב. נתבונן במספר דוגמאות, כאשר השתיים הראשונות כוללות לינאריזציה באמצעות התמרת כניסה בלבד.

1. בקרת רמת נוזל (Slotine) :

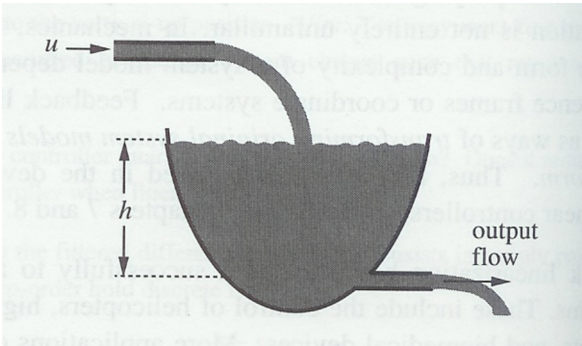


Figure 6.1 : Fluid level control in a tank

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^{h(t)} A(h')dh'\right] = u(t) - a\sqrt{2gh(t)}$$

$$\Rightarrow \quad A(h)\dot{h} = u - a\sqrt{2gh}$$

כאשר $A(h)$ שטח הפנים בגובה h.

זו משוואת מצב לא-לינארית, כאשר משתנה המצב הוא גובה הנוזל, $x \equiv h$.

נגדיר עתה את הכניסה u באמצעות משתנה כניסה חדש v :

$$\Rightarrow \quad u = a\sqrt{2gh} + A(h)v$$

נקבל :

$$A(h)\dot{h} = A(h)v$$

$$\Rightarrow \quad \dot{h} = v$$

קיבלנו קשר לינארי פשוט (אינטגרטור) בין הכניסה החדשה למצב.

2. בקרת זרוע רובוטית :

בפרק קודם ראינו כי דינמיקה של זרוע רובוטית ניתנת לתאור באמצעות המשוואה :

$$H(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = u$$

פה q הינו וקטור הקואורדינטות המוכללות, או וקטור הקונפיגורציה (קואורדינטות זויתיות או לינאריות של דרגות החופש השונות), u הינו וקטור הכוחות המוכללים. מצב המערכת הינו $x = (q;\dot{q})$.

נגדיר עתה את ההתמרה :

$$u = H(q)v + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q)$$

כאשר v וקטור הכניסה החדש, במימד זהה למימד u. נקבל:

$$H(q)\ddot{q} = H(q)v$$

ומכיוון ש $H(q)$ מטריצה לא-סינגולרית (למעשה $H(q) > 0$) ניתן לצמצמה ולקבל:

$$\ddot{q} = v$$

דהיינו $\ddot{q}_i = v_i$, $i = 1,\dots,n$. ניתן לראות כי הכניסה החדשה v קובעת ישירות את תאוצות המפרקים.

<u>הכללה</u>: שתי הדוגמאות האחרונות שייכות למשפחת מערכת שצורתן:

$$\dot{x} = Ax + BG(x)[u - \alpha(x)]$$

כאשר $G(x)$ מטריצה ריבועית. נניח כי $G(x)$ הפיכה בתחום $x \in D$. אזי, בתחום זה ניתן להגדיר $u = \alpha(x) + G(x)^{-1}v$, ולקבל:

$$\dot{x} = Ax + Bv$$

נתבונן עתה בדוגמאות בהן יש לשלב התמרת כניסה עם התמרת מצב.

3. (Slotine). נתבונן במערכת

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + ax_2 + \sin x_1$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 \cos x_1 + u\cos(2x_1)$$

מערכת זו אינה בצורה שצוינה לעיל. ה"בעיה" היא כי קיים רק משתנה כניסה אחד, אשר אינו יכול לבטל באופן ישיר את איבר הסינוס במשוואה הראשונה.

נבחר במשתני מצב חדשים:

$$z_1 = x_1$$
$$z_2 = ax_2 + \sin x_1$$

ע"י הצבה נקבל:

$$\dot{z}_1 = -2z_1 + z_2$$
$$\dot{z}_2 = -2z_1 \cos z_1 + \cos z_1 \sin z_1 + au\cos(2z_1)$$

משוואה זו ניתנת להפוך למשוואת לינארית באמצעות התמרת כניסה, פרט לאזור שבו $\cos(2z_1) = 0$, דהיינו $\cos(2x_1) = 0$.

4. (Khalil).

$$\dot{x}_1 = a\sin x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1^2 + u$$

נגדיר

$$z_1 = x_1$$
$$z_2 = a\sin x_2 \quad (= \dot{x}_1)$$

ונקבל

$$\dot{z}_1 = z_2$$
$$\dot{z}_2 = a\cos(x_2)(u - x_1^2)$$

כאשר x_1, x_2 ניתנים לביטוי כפונקציה של z_1, z_2 במשוואה האחרונה. נבחר עתה

$$u = (v + x_1^2)/a\cos x_2$$

ונקבל, בתחום שבו $\cos x_2 \neq 0$,

$$\dot{z}_1 = z_2$$
$$\dot{z}_2 = v$$

<u>תכן הבקר</u>: עקב שינוי משתני המצב, יש לתרגם את מטרות הבקרה במישור x למישור z. למשל, המטרה של ייצוב (רגולציה) של המערכת סביב מצב x_e תתורגם לייצוב המערכת המותמרת סביב $z_e = T(x_e)$.

<u>לינאריזצית מצב</u> של מערכת מצב $\dot{x} = f(x,u)$ הינה, אם כן, התמרת מצב הפיכה $z = T(x)$ והתמרת כניסה $u = \gamma(x,v)$, כך שהמצב המותמר z מקיים את המשוואה הלינארית $\dot{z} = Az + Bv$.

ההתמרה עשויה להיות מוגבלת לחלק מהמרחב כולו: למשל, ניתן לדבר על לינאריזציה של המערכת בתחומים $x \in D_x \subset \Re^n$, $u \in D_u \subset \Re^m$, עם תחומים מתאימים D_z, D_v למשתנים המותמרים, ואז ההתמרות יוגדר רק בתחומים אלה:

$$\gamma : D_x \times D_v \to D_u \ , \ T : D_x \to D_z \ .$$

מקובל לדרוש כי הנש"מ $v = 0, z = 0$ תיכלל בתחום ההגדרה, כלומר $0 \in D_v, 0 \in D_z$.

בנוסף מקובל להוסיף דרישות חלקות שונות על ההתמרות.

השאלות הבסיסיות לגבי סכמה זו הינן:

א. האם קיימת לינאריזציית מצב למערכת נתונה?

ב. באם כן – כיצד למצוא אותה?

תיאוריה מלאה קיימת עבור מערכות מצב לא-לינאריות מהצורה

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

כאשר f, g פונקציות חלקות. מערכות אלו נקראות מערכות <u>אפיניות</u> במשתנה הבקרה. התורה שפותחה כוללת תנאים מספיקים והכרחיים לקיום לינאריזציית מצב, וכן אלגוריתם לחישוב. למרבה הצער תנאים אלה חורגים מחומר לימוד, ולא נפרטס פה.

9.2. לינאריזציית כניסה-יציאה

במקרים רבים היציאה y אותה עלינו לבקר אינה זהה לוקטור המצב, והיא במימד קטן ממנו. הדרישה לקבלת יחס לינארי בין הכניסה למצב כולו עשויה לפיכך להיות מחמירה מדי. במקרים אלה נשאף לקבל יחס לינארי בין כניסה מותמרת v ליציאה המבוקרת.

<u>דוגמא</u>: נדגים את הגישה לבעיה זו באמצעות דוגמא (Slotine, p. 216).

$$\dot{x}_1 = \sin x_2 + (x_2+1)x_3$$
$$\dot{x}_2 = x_1^5 + x_3$$
$$\dot{x}_3 = x_1^2 + u$$
$$y = x_1$$

נגזור את y עד שיופיע איבר התלוי בכניסה u:

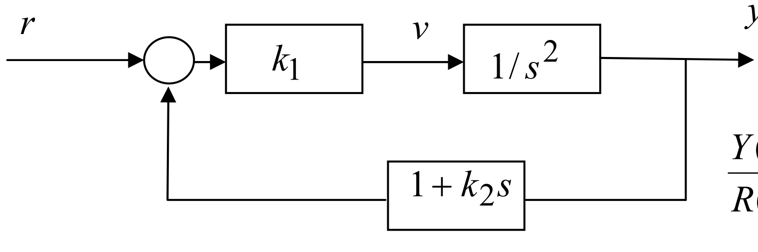
$$\dot{y} = \dot{x}_1 = \sin x_2 + (x_2+1)x_3$$
$$\ddot{y} = \ldots = (x_2+1)u + g_1(x)$$
$$\mathrm{g}_1(x) = (x_1^5 + x_3)(x_2 + \cos x_2) + (x_2+1)x_1^2$$

נבחר עתה

$$u = \frac{1}{x_2+1}(v - g_1(x))$$

ונקבל, בתחום $x_1 \neq -1$: $\underline{\ddot{y} = v}$

ניתן עתה לתכנן בקר מתאים עבור המערכת המותמרת, ולתרגמו לבקר עבור המערכת המקורית. למשל: בחירת הבקר $v = k_1(r - y - k_2\dot{y})$ (ראו ציור) נותנת מערכת מסדר שני בחוג סגור: $\ddot{y} + k_1k_2\dot{y} + k_1y = k_1r$.



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \ldots = \frac{k_1}{s^2 + k_1k_2s + k_2}$$

את אות הבקרה u יש לחשב עתה לפי הנוסחה ההתמרה לעיל, תוך הצבת

$$v = k_1(r - y - k_2\dot{y}),\quad \dot{y} = \dot{x}_1 = \sin x_2 + (x_2+1)x_3$$

<u>סיכום הגישה המוצעת</u>:

א. גזירה חוזרת של היציאה y וביטויה באמצעות המצב x, עד להופעת הכניסה x בביטוי: $y^{(k)} = h(x,u)$

ב. בחירת התמרת הכניסה $u = k(x,v)$ כך שיתקבל $y^{(k)} = v$.
$k(x,v)$ הינה הפונקציה ההפכית של $h(x,u)$ (לכל x).

ג. תכן בקר עבור המערכת $y^{(k)} = v$, והצבתו בביטוי של u.
ניתן להשתמש לשם כך בתכן קלאסי, משוב מצב, וכו'.

<u>הערה</u>: חשוב לזכור כי לחישוב u נדרשים משתני המצב. לפיכך השיטה דורשת מדידה (או לפחות הערכה) של המצב כולו.

<u>הדרגה היחסית</u>: המספר k (מספר הגזירות הנדרש עד להופעת v) נקרא הדרגה היחסית של המערכת. הסיבה לשם זה תובהר בהמשך. הדרגה היחסית *מוגדרת היטב* אם הפונקציה $h(x,u)$ הפיכה לכל x.

<u>הדינמיקה הפנימית</u>: למרות שקיבלנו קשר רצוי בין הכניסה ליציאה, קיים גורם חשוב נוסף שחיוני להצלחת הבקר המוצע, והוא יציבות וקטור המצב כולו.
הדינמיקה המתקבלת עבור משתני המצב (או לפחות של אותם משתני מצב שאינם פונקציה ישירה של היציאה ונגזרותיה) נקראת הדינמיקה הפנימית של המערכת, ויש לנתח את יציבותה בנפרד.

בדוגמא הקודמת: ניתן לראות כי הוקטור $z = (y, \dot{y}, x_3)$ מהווה וקטור מצב עבור המערכת החדשה. משוואות המצב לשני הרכיבים הראשונים הן, כמובן:

$$\dot{z}_1 = z_2$$
$$\dot{z}_2 = v$$

בעוד עבור הרכיב השלישי נקבל:

$$\dot{z}_3 = x_1^2 + u = x_1^2 + \frac{1}{x_2+1}(v - g_1(x)) = \ldots = f(z,v)$$

בדיקת היציבות של הרכיב האחרון (בחוג סגור) אינה פשוטה!

<u>המקרה של מערכת לינארית</u>: לשם הדגמה, נתבונן במערכת הלינארית:

$$Y(s)=\frac{b(s)}{a(s)}U(s)=\frac{b_m s^m+\ldots+b_0}{s^n+\ldots+a_1 s+a_0}U(s)$$

כאשר $b_m\neq 0$, ונניח $k_0=n-m\geq 1$. ניתן לייצג מערכת זאת, למשל, במימוש קנוני קונטרולבילי באמצעות משתני המצב: $X_i(s)=\frac{s^{i-1}}{a(s)}U(s)$.

ניתן להראות (תרגיל) כי לינאריזציית כניסה-יציאה תדרוש פה $k=k_0$ גזירות של היציאה. הקשר המתקבל הינו:

$$Y(s)=\frac{1}{s^k}V(s)\quad\Rightarrow\quad y^{(k)}=v$$

מסקנה: הגדרת הדרגה היחסית לעיל מתלכדת עם הדרגה היחסית של פונקצית התמסורת.

ניתן לראות כי הסכמה המתקבלת במקרה זה הינה למעשה הצבת קטבים מסוימת. בהנחה כי המערכת מינימאלית (ובפרט קונטרולבילית), ניתן למצוא משוב מצב מנורמל (מהצורה $u=\frac{1}{b_m}(Kx+v)$) אשר מבצע הצבת קטבים לפולינום $\hat{a}(s)=s^k b(s)$. החוג הסגור המתקבל יהיה:

$$Y(s)=\frac{b(s)}{s^k b(s)}V(s)$$

ולאחר צמצום $b(s)$ תתקבל התמסורת הנ"ל.

$b(s)$ מבטא פה את הדינמיקה הפנימית של המערכת. כאשר $b(s)$ אינו יציב-הורוביץ (דהיינו, המערכת המקורית אינה מינימום פאזה) הדינמיקה הפנימית אינה יציבה, ולכן סכמה זו תיכשל.

<u>מערכות אפיניות</u>:

נפתח נוסחאות מפורשות יותר למקרה של מערכות אפיניות במשתני הבקרה, מהצורה:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$
$$y = h(x)$$

א. חישוב התמרת הכניסה: ע"י גזירה נקבל

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial h}{\partial x}f(x) + \frac{\partial h}{\partial x}g(x)u$$

לקיצור הסימון נגדיר, עבור פונקציה $h(x)$ ושדה וקטורי $p(x)$ כלשהם, פונקציה חדשה:

$$(L_p h)(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x}p(x) \quad \text{או} \quad L_p h = \frac{\partial h}{\partial x}p$$

זוהי "הנגזרת של h בכיוון p". בסימון זה נקבל

$$\dot{y} = L_f h + (L_g h)u$$

באם $L_g h \equiv 0$, כלומר u לא מופיע בביטוי של $\dot{y}$, נקבל $\dot{y} = L_f h$. במקרה זה:

$$\ddot{y} = \frac{\partial (L_f h)}{\partial x}(f + gu) = L_f{}^2 h + (L_g L_f h)u$$

ניתן להמשיך כך עד הנגזרת $y^{(k)}$ שבה u מופיע, כאשר k הדרגה היחסית של המערכת.

באופן כללי: הדרגה היחסית k הינה השלם הראשון שעבורו $L_g(L_f)^{k-1}h \neq 0$. נקבל:

$$y^{(i)} = (L_f)^i h, \quad 1 \le i \le k-1$$
$$y^{(k)} = (L_f)^k h + L_g(L_f)^{k-1}u := a(x) + b(x)u$$

בתחום שבו $b(x)$ הפיכה (במקרה הסקלרי: שונה מאפס), נגדיר עתה את טרנספורמצית הכניסה

$$u = b(x)^{-1}[v - a(x)]$$

ונקבל:

$$y^{(r)} = v.$$

ב. דינמיקת האפס ומערכות מינימום פאזה: קיבלנו עתה את מערכת המצב

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad u = b(x)^{-1}[v - a(x)]$$

כאמור, עלינו לוודא עתה כי הדינמיקה הפנימית של המערכת המתקבלת הינה יציבה. תוצאה חשובה אומרת כי מספיק לבדוק יציבות אסימפטוטית של מערכת זו (דהיינו $x(t) \to x^e$) כאשר $v \equiv 0$. במקרה זה נקבל את האילוצים הבאים על משתני המצב:

$$y^{(i)} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad (L_f)^i h(x) = 0, \quad i = 0,1,\ldots k-1$$

כך שבאופן אפקטיבי אנו נותרים עם מערכת מסדר נמוך יותר, מסדר $(n-k)$. מערכת זו נקראת <u>דינמיקת האפס</u> של המערכת המקורית. באם דינמיקת אפס יציבה, המערכת המקורית נקראת <u>מינימום פאזה</u>.

לסיכום: לאחר חישוב התמרת הכניסה, יש לוודא כי המערכת מינימום פאזה (כלומר: דינמיקת האפס המתקבלת היא יציבה). זהו תנאי <u>הכרחי</u> לשימוש בלינאריזציית כניסה-יציאה לצורך תכנון בקרים לייצוב (רגולריזציה) ועקיבה.

דוגמא (Khalil, example 12.9/13.5). נתבונן במערכת Van Der Pol:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u \end{aligned}$$

ונקבע $y = x_2$. אזי

$$\dot{y} = \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u := a(x) + u$$

כאשר $b(x) = 1 \neq 0$. לפיכך הדרגה היחסית היא $k = 1$ (במישור המצב כולו). התמרת הכניסה $u = -a(x) + v$ נותנת:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= v \end{aligned}$$

לקבלת דינמיקת האפס, נציב $v = 0$, עם האילוץ $y = x_2 = 0$. נקבל מייד את דינמיקת האפס: $\dot{x}_1 = 0$. דינמיקה זו אינה יציבה אסימפטוטית. לפיכך המערכת אינה מינימום פאזה, ולא ניתן להשתמש בסכמת לינאריזציה זו.

דוגמא (Khalil, example. 12.9/13.6.).

$$\dot{x}_1 = -x_1 + \gamma(x_3)u, \quad \gamma(x_3) = (2 + x_3^2)/(1 + x_3^2)$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\dot{x}_3 = x_1 x_3 + u$$
$$y = x_2$$

נדרש לייצב את היציאה סביב $y = 0$. נבצע לינאריזציה ליציאה:

$$\dot{y} = \dot{x}_2 = x_3$$
$$\ddot{y} = \dot{x}_3 = x_1 x_3 + u$$

לפיכך $k = 2$, וטרנספורמציית היציאה המבוקשת: $u = -x_1 x_3 + v$.

נבדוק עתה את דינמיקת האפס. עבור $v = 0$ והאילוצים

$$y = x_2 = 0 \ , \ \dot{y} = x_3 = 0$$

נקבל את משוואת המצב הנותרת: $\dot{x}_1 = -x_1$. משוואה זו יציבה כמובן, כך שהמערכת מינימום פאזה!