אותות ומערכות 044130

אדם שורץ
הפקולטה להנדסת חשמל
טכניון

19 March, 2006

תוכן ענינים

פרק 1

מבוא

דפים אילו הם תקציר הרצאות לקורס. לדעתי הם אינם תחליף להרצאות, שכן בהרצאות מועברת אינטואיציה חשובה. אולם קריאה שיטחית של דפים אלו כהכנה להרצאה תאפשר להפיק את מירב התועלת מההרצאה (רמת הבנה גבוהה יותר, ותשומת לב להרצאה ולא לצורך לכתוב הכל). בנוסף אפשר לקרוא לאחר ההרצאה כדי לוודא שכל הנקודות הובנו וכחזרה המשפרת את הטמעת החומר.

מטבע הדברים יש בחוברת נושאים אשר לא יכוסו בכיתה (בפרט חזרה עלחומר קודם), נושאים אשר מכוסים בכיתה רק בקצרה, ודוגמאות אשר לא יופיעו בכיתה. מצד שני ישנן דוגמאות אשר מופיעות בהרצאה אך לא בחוברת. בנוסף, חסרים בחוברת שרטוטים רבים. עם זאת, החומר התאורטי של הקורס מכוסה כולו בחוברת.

1.1 מוטיבציה

המהנדס המודרני מרבה להשתמש בכלים כמותיים לצורך ניתוח ותכנון. מטרת הקורס היא לתת כלים, רובם מתמטיים, לניתוח התנהגות של מערכות, ומספר כלים אשר ישמשו לתכנון.

1. דוגמאות:

- עבוד אות: סנון רעשים
  - איפיון רעש בתחום התדר
  - הפחתת רעשים

אנו מכירים את המושגים "צליל גבוה" ו-"צליל נמוך" מחיי היום-יום. בפרט כולנו מכירים את הבורר בנגן החביב עלינו אשר מאפשר הגברת הצלילים הגבוהים או הנמוכים. כיצד ניתן לאפיין את תחום הצלילים הגבוהים של אות נתון, וכיצד ניתן לתכנן מסנן---כלומר מכשיר המשנה אות נתון כך שיוגבר תחום תדר מסוים? כיצד לתת משמעות מדויקת למשפט "לאות הרצוי נוסף כנראה רעש אשר בולט במיוחד בצלילים הגבוהים"? כיצד לתכנן מסנן אשר יפחית רעשים כאלו תוך פגיעה מינימלית באות הרצוי? זוהי דוגמה לניתוח ותכנון בתחום התדר. הבנת תחום התדר והכלים שהוא מציע הם נושאים מרכזיים בקורס.

- קידוד ושיחזור: אפנון

שידור רדיו מתבצע בתדרים גבוהים יחסית---עשרות עד מאה מגה-הרץ---מסיבות הנדסיות ומסיבות של זמינות משאבי תדר. לעומת זאת תדרי השמע הם נמוכים. כיצד ניתן אם כך לשדר אות שמע? הפתרון הוא על ידי אפנון, כלומר "הלבשת" האות הרצוי על גבי "גל נושא" בתדר השידור. איפיון וניתוח של איפנון נוחים בשיטות של תחום התדר, ודורשים הבנה של המשמעות ההנדסית של התמרות פוריה.

- דגימה ושחזור לצורך עבוד אות ספרתי.

בהנתן אות אנלוגי (דוגמה אות שמע),כיצד ניתן ליצר ממנו אות ספרתי (כלומר סדרת דגימות)? עקב כוחם הגובר של מחשבים, נוח לטפל באותות ולעבדם בצורה ספרתית, ולשם כך יש לבצע דגימה. האם פעולת הדגימה גורמת לאיבוד מידע? איזה חלק מהמידע הולך לאיבוד? כדי לתת תשובה יש להפעיל כלים מתמטיים של פונקציות מוכללות, ולעבוד במשולב בתחום הזמן ובתחום התדר.

- ניתוח ותכנון מערכות.

האותות בהם אנו מטפלים יכולים לייצג מידע (למשל מדידות של מכ"מ), או להיות אותות המשפיעים על פעולה של מערכת כלשהיא (למשל אותות בקרה להפעלת קורא הלייזר בקורא התקליטורים). על אותות אלו משפיעים גורמים רבים. חלקם אינם בשליטתינו (רעשים) ועל חלקם אנו שולטים (למשל מסננים). מבחינתינו "מערכת" היא "קופסה שחורה" אשר משפיעה על האות. נרצה לאפיין כיצד משפיעה מערכת נתונה על אותות (ניתוח) ולפתח כלים לתכנון מערכות אשר ישיגו השפעה רצויה על אותות. בקורס נלמד לאפיין ולנתח מערכות לפי מאפיינים רבים, כולל קריטריון מרכזי של "יציבות של מערכת". אינטואיטיבית, מערכת יציבה היא מערכת אשר הפעלה שלה על אות קטן תתן לנו תוצאה קטנה---ומבחינה הנדסית זו ודאי תכונה רצויה.

2. שאלות ומטרות בקורס:

- הרחבת סוג האותות בהם אנו יודעים לטפל בצורה מדויקת---פונקציות מוכללות.
- אפיון אות בתחום התדר ופיתוח כלים בתחום התדר.
- אפיון מוצא מערכת בתלות בכניסה.
- חיבור מערכות לצורך תכנון מודולרי, כולל חיבור משוב.
- מטרה כללית: להכיר כלים ולפתח הבנה של התורה המתמטית הבסיסית של אותות ושל מערכות לינאריות.

3. ידע מוקדם

מעבר לקדמים הרישמיים, קורס זה משתמש ומרחיב נושאים מאלגברה לינארית, טורי פוריה והתמר-ות אינטגרליות, ומשוואות דיפרנציאליות רגילות. השימוש בכלים מפונקציות מרוכבות הוא קטן יותר. מושגי יסוד רבים אשר נלמדו בתורת המעגלים יורחבו כאן ויקבלו ביסוס מתמטי איתן. בנוסף נשתמש במעגלים חשמליים ובמערכות מיכניות (פיזיקה 1) כדוגמאות של אותות ושל מערכות.

4. סקירת תכנית הקורס וקורסי המשך

(א) מבוא: דוגמאות. סקירת נושאי הקורס.

(ב) משוואות דיפרנציאליות כמערכת. תכונות של מד״ר. פתרונות של מד״ר. ייצוג פתרונות דרך קונוולוציה עם תגובת ההלם. תכונות של מערכות ותכונות מד״ר כמערכת.

(ג) מערכות אנטגרליות ומערכות קונוולוציה. פונקציות מוכללות. תכונות מערכת אינטגרלית ומערכת קונוולוציה. חיבור של מערכות קונוולוציה.

(ד) יציבות. הגדרת יציבות BIBO. יציבות BIBO של מערכת קונוולוציה. הגדרת יציבות אסימפטוטית. יציבות אסימפטוטית של מערכת מד״ר ושרשי הפולינום האפייני.
תגובת מערכת מד״ר וקונוולוציה לכניסה $e^{\alpha t}$.

(ה) התמרת פוריה. הרחבה לפונקציות מוכללות. דוגמאות לשימוש. מבוא למסננים.

(ו) התמרת לפלס. התמרה דו צדדית ופונקצית התמסורת. יציבות BIBO, חיבור מערכת כולל חיבור משוב, מערכת הופכית.
התמרה חד צדדית ופתרון מד״ר עם תנאי התחלה. יציבות אסימפטוטית.
התמרה הפוכה וחישובה.

(ז) טור פוריה. הרחבה לפונקציות מוכללות. שימושים להתמרת פוריה. תופעת גיבס. דגימה ושחזור. קשרים בן לפלס ופוריה וטור פוריה. תגובת תדר ודיאגרמות בודה. דוגמה מסכמת - מסנן Butterworth.

(ח) אותות ומערכות בזמן בדיד. הזזה ומשוואות הפרש, תכונות של משוואות הפרש. דלתה של קרונקר ותגובת הלם. קונוולוציה בזמן בדיד. תכונות מערכת גרעין וקונוולוציה. תגובות לכניסה אקספוננציאלית. יציבות BIBO ויציבות אסימפטוטית.

(ט) התמרת Z. התמרת דו צדדית, פונקצית תמסורת ויציבות BIBO. התמרה חד צדדית, פתרון משוואות הפרש, יציבות BIBO ויציבות אסימפטוטית.

(י) התמרת פוריה בזמן בדיד. טור פוריה. תכונות DTFT.

(כ) מערכות במרחב המצב. דוגמה: מיקום קטבים בעזרת משוב. הגדרת מצב, ייצוג ופתרון מד״ר על ידי משוואות מצב. פתרון משוואות מצב במשור הזמן. המטריצה היסודית, הפונקציה e^{At} ותכונותיה. יציבות BIBO דרך מרחב המצב. משוואות מצב בזמן בדיד. שיטות התמרה למשוואות מצב.

(ל) סקירת תכנית הקורס וקורסי המשך

קורסי המשך:

תחום התקשורת: תקשורת ספרתית ותקשורת אנלוגית.

תחום עיבוד אותות: מבל״ס, עיבוד תמונות, אותות ביולוגיים.

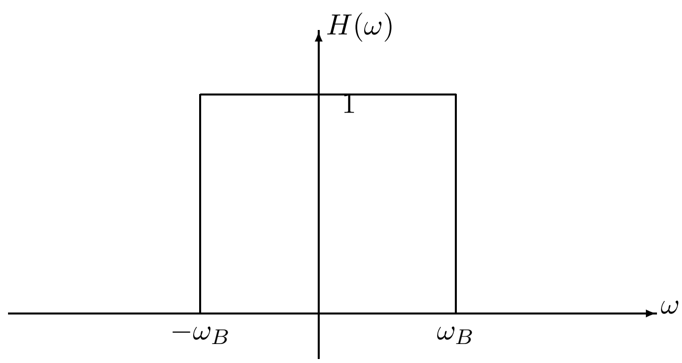
בקרה ותורת המערכות. תורת הרשתות.

אותות אקראיים. קורסים בניתוח של רשתות מחשבים של ואלגוריתמים.

על מנת להמחיש אחד הנושאים---ניתוח בתחום התדר---נתאר דוגמה הלקוחה מסעיף 5.5.1. נחשוב על מסנן כעל רכיב המתייחס בצורות שונות לאותות בתדרים שונים. המסננים הבסיסיים ביותר מיועדים אכן לסנן תדרים מסויימים. נראה בהמשך כי אפשר לתאר מסנן דרך פונקציה הנקראת תגובת התדר: אם נעביר במסנן אות שגודלו X והתדר שלו הוא ω_0, ואם והמסנן מתואר על ידי הפונקציה $H(\omega)$ אזי במוצא המסנן נקבל $H(\omega_0)X(\omega_0)$. למשל מסנן מעביר נמוכים עם תדר קטעון ω_B הוא מערכת אשר תגובת התדר שלה היא

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_B \\ 0 & |\omega| > \omega_B \,. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

כלומר, אות בתדר נמוך מ-ω_B יעבור ללא שינוי, ואות בתדר גבוה יותר לא יעבור כלל.



איור 1.1: מסנן מעביר נמוכים

תגובת התדר היא בדיוק הפאזור המתאר את ההתנהגות של מעגל: אם נכניס למעגל אות (זרם או מתח) בצורה $X(\omega_0)e^{j\omega_0 t}$ אזי תגובת המעגל (שוב זרם או מתח) תהיה $H(\omega_0)X(\omega_0)e^{j\omega_0 t}$ כלומר אם פאזור אות הכניסה הוא $X(\omega_0)$ אזי פאזור אות המוצא הוא $H(\omega_0)X(\omega_0)$.

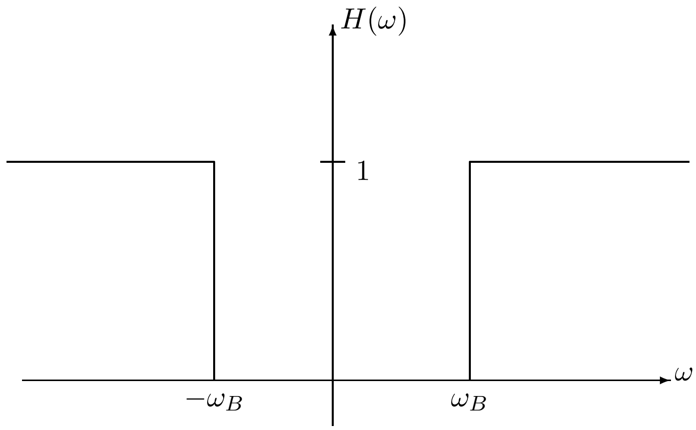
בצורה דומה, מסנן מעביר גבוהים עם תדר קטעון ω_B הוא מערכת עם תגובת התדר

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| > \omega_B \\ 0 & |\omega| < \omega_B \,. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

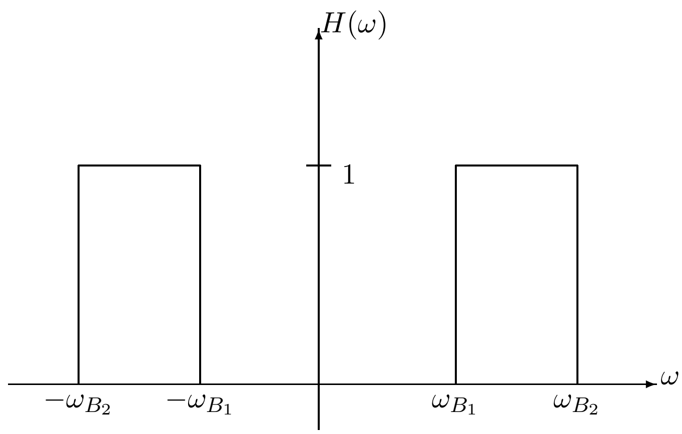
מסנן מעביר סרט בתדרים $\omega_{B_1}, \omega_{B_2}$ הוא מערכת אשר תגובת התדר שלה היא

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega_{B_1} < |\omega| < \omega_{B_2} \\ 0 & otherwise. \end{cases} \tag{1.1.3}$$

בעזרת מושג המסנן אפשר לתאר מערכת מעשית:



איור 1.2: מסנן מעביר גבוהים



איור 1.3: מסנן מעביר סרט

דוגמה 1.1.1 רמקול איכותי למערכות שמע מורכב למעשה ממספר רמקולים באותה קופסה. הסיבה לשימוש במספר רמקולים היא שקשה לבנות רמקול איכותי אשר יכול לתרגם אותות חשמליים לאותות אקוסטיים בצורה נאמנה על פני טווח תדרים גדול. זאת כיוון שבתדרים נמוכים יש צורך להזיז כמויות אויר גדולות, ולכן צריך רמקול גדול, אך רמקול כזה מתקשה לנוע בתדירויות גבוהות. מסיבה זו בדרך כלל ישנם שלושה רמקולים, הזוכים לשמות *Woofer*---רמקול המטפל בתדרים נמוכים ($700-70$ הרץ), *mid-range*---רמקול המטפל בתדרי הביניים ($5000-700$ הרץ), ו-*tweeter*---רמקול המטפל בתדרים גבוהים (במערכות איכותיות במיוחד יש *subwoofer* לתדרים נמוכים מאד). כחלק מהרמקול בונים מעגל, הנקרא *crossover*, ואשר תפקידו הוא להעביר לכל רמקול רק את תחום התדרים הנוגע לו. זאת כדי לנצל טוב יותר את אנרגיית האות, ולהמנע מלגרום נזקים לרמקולים. המעגל מיישם בדוגמה שלנו שלוש מערכות---מסנן מעביר נמוכים המעביר ל-*woofer* את התדרים הנמוכים, מסנן מעביר סרט ומסנן מעביר גבוהים המעבירים את התדרים המתאימים לרמקולים האחרים. זהו שימוש במסננים במובן הצר שלהם.

בנוסף משתמשים לעיתים במעגל החשמלי כדי לתקן עיוותים של הרמקולים. רמקול אידאלי מקבל אות חשמלי

בתחום תדרים נתון, והופך אותו לאות אקוסטי ללא שינוי. כלומר תגובת המערכת היא קבועה:

$$H(\omega) = \begin{cases} K & \omega_{B_1} < \omega < \omega_{B_2} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \tag{1.1.4}$$

כאן K הוא ההגבר או ההנחתה של הרמקול. אולם רמקולים מעשיים כידוע אינם אידאלים. כלומר גם להם יש העדפות לתדרים מסוימים. ניתן לקזז על כך במידת מה על ידי מעגל חשמלי---מסנן, שיוגדר כך. אם תגובת התדר של הרמקול היא $H_L(\omega)$. הסיבות לתגובה לא אידאלית רבות. למשל, בתדרי תהודה של קופסת הרמקול אפשר לצפות להגבר גבוה, ובתדרים אחרים להנחתה של הקופסה. המשקל של הרמקול גורם בדרך כלל לירידה בביצועים עם עליית התדר, וכו'.

נניח שאנו יכולים ליישם מסנן אשר תגובת התדר שלו היא

$$H_F(\omega) = \begin{cases} K/H_L(\omega) & \omega_{B_1} < \omega < \omega_{B2} \\ 0 & \text{אחרת.} \end{cases} \tag{1.1.5}$$

האות החשמלי נכנס למסנן ואחריו לרמקול, כלומר המערכות פועלות בטור. תגובת התדר של שתי המערכות ביחד היא לכן

$$H(\omega) = H_L(\omega)H_F(\omega) = \begin{cases} K & \omega_{B_1} < \omega < \omega_{B2} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \tag{1.1.6}$$

ובכך תיקנו התנהגות של מערכת מכנית (רמקול) על ידי מעגל חשמלי. ביחד עם המסננים, תיקון כזה יביא את הרמקול כולו לביצוע מושלם: המרת האות החשמלי לאות אקוסטי ללא כל עיוות.

דוגמה 1.1.2 יישום חשוב למסננים ספרתיים הוא מכשיר השמיעה. המכשירים החדשים הם כולם מעבדי אותות זעירים ומתוחכמים להפליא. בדוגמה זו נתאר בקצרה רק רכיב אחד שלהם---המסנן.

פגיעות בשמיעה אינן אחידות בין שתי האזניים, וכן אינן אחידות מבחינת תדרים. בדרך כלל עם הגיל יורדת תחילה השמיעה בתדרים הגבוהים. משמעויות ירידת השמיעה הן: ירידת העצמה המינימלית של אות אשר האדם מזהה כאות, ירידת היכולת להבחין ולזהות אותות מורכבים (דיבור) וכו'. מכשירי השמיעה הישנים היו מגברים: פירוש הדבר שאדם אשר נפגעה יכולת שמיעתו בתדרים גבוהים נאלץ לבחור בין החלופות הבאות: "חרשות" לצלילים גבוהים, או עוצמה בלתי נסבלת לצלילים נמוכים. מכשירי השמיעה החדשים (שהם כאמור סיפרתיים) מתוארים כ-*Multi-channel*: כלומר, יש להם מערך מסננים אשר לכל אחד מהם הגבר מתכוונן. לדוגמה, מסנן העוסק בתדרים נמוכים מאד (מאות בודדות של הרצים), מסנן בתדרים נמוכים (מאות עד אלפים בודדים), בתחום האמצעי של השמיעה (סביב 5000), ובתחום גבוה. ניסויים מראים שהפרדה כזו מועילה בהחלט ליכולת להבין ולזהות אותות מורכבים. מערכת כזו יש לכוונן: לומר להתאים את ההגבר של כל מסנן באופן כזה שהשמיעה תהיה מיטבית. כאן המסננים אינם מעבירי סרט אידאליים, בגלל הרצון למנוע שינויים גדולים (לא רציפים) בתגובת התדר. אלא כל מסנן מגביר סביב תדר מרכזי משלו, ומנחית באופן הולך וגובר עם ההתרחקות מהתדר המרכזי.

גם כאן, הנסיון בדרך כלל הוא לתקן את תגובת התדר של האוזן (אשר נפגעה) על ידי בחירת הגבר המסננים.

רכיבים נוספים במכשירי השמיעה הם רכיבים תלויי אמפליטודה. פגיעה בשמיעה פירושה אבלן היכולת לשמוע צלילים חלשים; אך אין היא משפרת את עמידתנו לצלילים חזקים. לכן (במיוחד בפגיעות קשות) יש לבנות מערכת אשר מקטינה את טווח העוצמות, מזה המקובל, לזה המותאם ליכולות האוזן. רכיב כזה הוא לא לינארי ובקורס זה לא נדון בכאלו.

נחזור לדוגמה זו בסעיף 5.5.1 לאחר שנדון בהתמרת פוריה: אז נוכל להבין אותה יותר לעומק.

פרק 2

משוואות דיפרנציאליות רגילות כמערכת

חזרה לקראת פרק זה: יש לחזור על מד"ר לינאריות עם מקדמים קבועים: פתרון הומוגני ופרטי כפי שנלמדו בקורס מד"ר, פתרונות בכניסה אפס (y_{ZSR}) ובתנאי התחלה אפס (y_{ZIR}) כפי שנלמדו בקורס מעגלים חשמליים, כולל שיטות לחישוב הפתרונות. מקורס מעגלים חשמליים---חוק אוהם.

משוואות דיפרנציאליות רגילות מהוות מודל דינמי למערכות מסוגים שונים - ממערכות מכניות, דרך מעגלים חשמליים (אנלוגיים) ועוד. בקורס זה נתייחס למשוואות כמתארות מערכת, כלומר מקבלות אות כניסה ומייצרות אות מוצא.

לאחר חזרה על מ.ד.ר ופתרונותיהן, ניתן הגדרות כלליות של תכונות של מערכות נבדוק מתי תכונות אילו מתקיימות במערכת המתוארת על ידי מ.ד.ר.

2.1 משוואות דיפרנציאליות לינאריות ופתרונן: חזרה

בפרק זה נחזור על נושא מ.ד.ר לינאריות עם מקדמים קבועים. נושא זה מכוסה בקורס הקדם מ.ד.ר ח' 131401. החידוש היחיד בסעיף זה (ביחס לקורס הקדם) הוא מושגי תגובה בתנאי התחלה אפס ותגובה בכניסה אפס.

הצורה הכללית של מ.ד.ר כזו היא

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \tag{2.1.1}$$

כאשר $x(t)$ הוא אות נתון---מבחינתינו הכניסה למערכת---ו- $y(t)$ היא התגובה. אנו נניח תמיד כי $a_N \neq 0$ וכן $b_M \neq 0$, כיוון שאחרת ניתן להגדיר את הסכום עם איבר אחד פחות.

הערה: בספרות מופיעה משוואה זו לעיתים בצורה

$$\sum_{n=0}^{N} a_{N-n} \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_{M-m} \frac{d^m x(t)}{dt^m}. \tag{2.1.2}$$

כמובן שאין הבדל מהותי, אך יש לבדוק מהו הסימון. אנו נהיה עקביים בסימון של (2.1.1).

נסמן $y^{(k)}(t) \doteq \frac{d^k y(t)}{dt^k}$.

משפט 2.1.1 בהינתן פונקציה $x(t)$ בעלת M נגזרות עבור $t \geq t_0$ וכן תנאי התחלה

$$\{y(t_0), y^{(1)}(t_0), \ldots, y^{(N-1)}(t_0)\}$$

בזמן t_0, למ.ד.ר (2.1.1) יש פיתרון יחיד $\{y(t) : t \geq t_0\}$.

הערה: נהוג לסמן ב-x את הפונקציה, אשר מקבלת ברגע t את הערך $x(t)$. סימון מתמטי נוסף עבור הפונ-קציה, בו נמעט להשתמש, הוא $x(\cdot)$, כאשר הנקודה מסמנת מקום עבור משתנה---ומשתמע שזו פונקציה. לעיתים לא נקפיד על ההבחנה ונסמן ב-$x(t)$ את הפונקציה.

טענה 2.1.2 אם y_1 פותר את (2.1.1) עבור כניסה x_1 ותנאי התחלה

$$\{y_1(t_0), y_1^{(1)}(t_0), \ldots, y_1^{(N-1)}(t_0)\},$$

ו- y_2 פותר את (2.1.1) עבור כניסה x_2 ותנאי התחלה

$$\{y_2(t_0), y_2^{(1)}(t_0), \ldots, y_2^{(N-1)}(t_0)\},$$

אזי $\alpha y_1 + \beta y_2$ פותרים את (2.1.1) עבור כניסה $\alpha x_1 + \beta x_2$ ותנאי התחלה

$$\{\alpha y_1(t_0) + \beta y_2(t_0), \alpha y_1^{(1)}(t_0) + \beta y_2^{(1)}(t_0), \ldots, \alpha y_1^{(N-1)}(t_0) + \beta y_2^{(N-1)}(t_0)\}.$$

הוכחה: נציב ב-(2.1.1) ונקבל שהמשוואה מתקיימת, בגלל לינאריות פעולת הגזירה. כמו כן מתקיימים תנאי ההתחלה. לפי משפט 2.1.1 למשוואה יש פתרון יחיד, ולכן נובע כי אכן זהו הפתרון. מ.ש.ל.

מ.ד.ר מגדירה מערכת במובן הבא: עבור אות כניסה x המ.ד.ר ביחד עם תנאי התחלה מגדירה תגובה או מוצא y. זהו הרעיון בבסיס המושג של "מערכת:" זהו תאור של קשר בין כניסה ותגובה. בהמשך נראה כיצד להתייחס לתנאי ההתחלה.

לפני שנדון במ.ד.ר כמייצגות מערכות, נחזור על שיטות בניית הפתרון למ.ד.ר. השיטה הראשונה שנדון בה היא חישוב פתרון פרטי ופתרון הומוגני.

הגדרה 2.1.3 פתרון הומוגני של (2.1.1) הוא פתרון המשוואה כאשר $x \equiv 0$ (כלומר $x(t) = 0$ לכל t).
הפתרון ההומוגני הכללי של (2.1.1) הוא פתרון הומוגני בעל N פרמטרים חפשיים, כך שבחירתם מאפשרת התאמת הפיתרון לכל תנאי התחלה. נסמן פתרון כזה ב-y_h.
פתרון פרטי של (2.1.1) הוא פתרון המשוואה עבור אות הכניסה הנתון x, ללא התחשבות בתנאי ההתחלה. נסמן פתרון כזה ב-y_p.

טענה 2.1.4 ניתן למצוא פתרון למ.ד.ר (2.1.1) כך:

1. נמצא פתרון פרטי y_p,
2. נחשב את הפתרון ההומוגני הכללי y_h,

3. נחשב את ערכי הפרמטרים החופשיים של $y_h + y_p$ כך שיתאימו לתנאי ההתחלה הנתונים.

הוכחה: נובע מטענה 2.1.2. מ.ש.ל.

השיטה השניה לבניית פתרון היא על ידי חלוקה לפתרון בתנאי התחלה אפס, ולפתרון בכניסה אפס.

הגדרה 2.1.5 פתרון בכניסה אפס של (2.1.1) הוא פתרון המשוואה כאשר $x \equiv 0$, עבור תנאי ההתחלה הנתונים. נסמן פתרון כזה ב-y_{ZIR}.

פתרון בתנאי התחלה אפס של (2.1.1) הוא פתרון המשוואה עבור אות הכניסה הנתון x, ועבור תנאי התחלה השווים לאפס. נסמן פתרון כזה ב-y_{ZSR}.

טענה 2.1.6 $y \doteq y_{ZIR} + y_{ZSR}$ הוא פתרון למ.ד.ר (2.1.1).

הוכחה: נובע מטענה 2.1.2. מ.ש.ל.

נשים לב כי אם y_1 ו- y_2 פותרים את המ.ד.ר עם כניסה זהה (אך תנאי התחלה שונים) אזי $y_1 - y_2$ הוא פתרון הומוגני. הפתרון y_{ZIR} הוא, לפי הגדרתו, פתרון הומוגני (אך כמובן לא הפתרון ההומוגני הכללי). לעומת זאת y_{ZSR} הוא פתרון פרטי רק עבור תנאי התחלה אפס. כמו כן, מהמשפטים לעיל נובע כי צירוף לינארי של פתרונות הומוגניים הוא פתרון הומוגני וסכום של פתרון פרטי ופתרון הומוגני הוא פתרון פרטי.

הגדרה 2.1.7 נסמן נגזרת בעזרת "אופרטור" D, כך שאת המ.ד.ר (2.1.1) נרשום בצורה

$$\sum_{n=0}^{N} a_n D^n y(t) = \sum_{m=0}^{M} b_m D^m x(t) \tag{2.1.3}$$

הפולינום האפייני של (החלק ההומוגני) של המ.ד.ר הוא הפולינום המתייחס לאות התגובה (צד שמאל) של המשוואה. הוא מתקבל מהחלפת D במשתנה, למשל λ, כלומר

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n \tag{2.1.4}$$

שרשי הפולינום האפייני הם הערכים של λ כך שהביטוי (2.1.4) שווה לאפס.

את הפתרון ההומוגני ניתן למצוא בצורה שיטתית.

משפט 2.1.8 נסמן ב-$\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ את השרשים של הפולינום האפייני של המ.ד.ר. אזי הפתרון ההומוגני הכללי הוא

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i f_i(t) \tag{2.1.5}$$

כאשר הפונקציות $f_i(t)$ הן פונקציות עצמיות של המשוואה ההומוגנית (כלומר פתרונות הומוגניים), ונתונות כלהלן. אם λ_i הוא שורש בריבוי יחיד של הפולינום האפייני אזי $f_i(t) = e^{\lambda_i t}$.

נניח כי λ_i הוא שורש בריבוי $k+1$, כלומר $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \cdots = \lambda_{i+k}$ ושורש זה שונה מכל השרשים האחרים. אזי $f_{i+j}(t) = t^j e^{\lambda_i t}$ עבור $0 \le j \le k$.

2.2 מערכות ומשוואות דיפרנציאליות ליניאריות

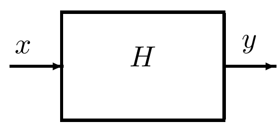
בסעיף זה נתייחס בצורה כללית יותר למערכות, כאשר מ.ד.ר משמשות כדוגמה. ראינו כי פתרון מ.ד.ר תלוי גם בכניסה וגם בתנאי התחלה. נתרכז בשלב זה בהשפעת הכניסה בלבד.

2.2.1 תכונות וסיווג של מערכות

נתבונן במערכות המגדירות קשר בין כניסה ויציאה.

הגדרה 2.2.1 מערכת מיפוי כניסה-יציאה *Input Output Map—IOM* היא מיפוי, שיסומן ב-Φ, בין מרחב (אוסף) אותות הכניסה, שנסמן ב-$\mathbb{X}$, לבין מרחב (אוסף) אותות היציאה, אשר נסמן ב-$\mathbb{Y}$.

לצורך המחשה אנו נתשמש בסימון הבא: נקרא למערכת H. נסמן את הקשר דרך השרטוט



איור 2.1: מערכת מיפוי כניסה יציאה

ונסמן זאת גם כ-$y = \Phi(x)$, כאשר סימון זה מדגיש את הקשר בין האותות. לעיתים נסמן זאת גם כך: $y(t) = \Phi[x](t)$. סימון זה יש להבין כך: תחילה פועל המיפוי Φ על האות כולו. כאשר נרצה לדעת את הערך של התוצאה y ברגע נתון t, נציב את t בתוצאת המיפוי, שהיא בעצמה פונקציה (אות).

בהמשך נעסוק בעיקר במערכות מיפוי כניסה יציאה, ולכן לא נציין עובדה זו במפורש: ההנחה היא שאם לא נאמר אחרת, המערכת הנדונה היא מסוג מיפוי כניסה יציאה.

דוגמה 2.2.2 נתבונן במשוואה דיפרנציאלית עבורה מרחב אותות הכניסה והיציאה $\mathbb{X}$ ו-$\mathbb{Y}$ הם אותות על ציר הזמן החיובי (כלומר מוגדרים מ-0 והלאה). אם נדרוש תנאי התחלה, למשל, אפס בזמן אפס, אזי נקבל מערכת מיפוי כניסה יציאה. זאת משום שלכל כניסה תתאים יציאה אחד בדיוק.
לעומת זאת, אם לא נגדיר תנאי התחלה, אזי לכל כניסה תהיינה תגובות רבות אפשריות, וזו אינה מערכת מיפוי כניסה יציאה.

אחד המאפיינים של אות ומערכת הוא סוג ציר הזמן.

הגדרה 2.2.3 אות נקרא אות בזמן בדיד אם ציר הזמן שלו בדיד; נסמן אות כזה ב-$x(n)$ כאשר משתנה הזמן n מקבל ערכים בדידים. אם ציר הזמן רציף, נקרא לו אות בזמן רציף.
מערכת בזמן בדיד היא מערכת שהכניסה וכן היציאה שלה הם אותות בזמן בדיד.
מערכת נקראת דינמית אם אותות הכניסה והיציאה הם אותות זמניים.
מערכת בזמן רציף היא מערכת שהכניסה וכן היציאה שלה הם אותות בזמן רציף.
מערכת היברידית היא מערכת עבורה אחד האותות הוא בזמן בדיד והשני בזמן רציף.

דוגמה 2.2.4 המערכת המוגדרת על ידי (2.1.1) היא כמובן מערכת דינמית בזמן רציף.
דוגמה למערכת שאינה דינמית היא מערכת המתוארת על ידי משוואה אלגברית: היא מקבלת כניסה x ותגובתה היא y:

$$y = Ax \tag{2.2.1}$$

כאשר A היא מטריצה, ו-x, y הם וקטורים.
מערכת הדוגמת אות רציף היא מערכת היברידית: למשל טלפון סיפרתי. הוא מקבל אותות קול (אות בזמן רציף) ומתרגם אותו לסידרת מספרים (אות בזמן בדיד).

עבור המערכת המוגדרת על ידי (2.1.1) $x(t)$ הוא מספר (אולי מרוכב), וגם התגובה y היא חד ממדית.

הגדרה 2.2.5 מערכת *SISO: Single Input Single Output* היא מערכת אשר הכניסה וכן התגובה הן חד-ממדיות.
מערכת נקראת *MIMO: Multiple Input Multiple Output* אם הכניסה וכן היציאה הם וקטורים.
בצורה דומה מוגדרות מערכות *SIMO* ו-*MISO*.

הגדרה 2.2.6 זכרון. מערכת נקראת חסרת זיכרון אם היציאה בזמן t תלויה בערכי הכניסה רק דרך הערך בזמן t.

הגדרה זו היא בעלת משמעות כמובן רק למערכות דינמיות.

דוגמה 2.2.7 המערכת המוגדרת על ידי (2.1.1) היא כמובן מערכת עם זיכרון משום שידיעת הערך של אות הכניסה ברגע מסויים (ואפילו ידיעת כל נגזרותיו) אינה מספיקה לצורך חישוב התגובה באותו רגע.
המערכות

$$y(t) = 2x(t) \qquad y(t) = x(t) + t^2 \tag{2.2.2}$$

הן אמנם דינמיות, אך חסרות זיכרון.
המערכת המוגדרת על ידי (2.1.1) היא כמובן בעלת זיכרון.
המערכת

$$y(t) = x(t-1) \tag{2.2.3}$$

היא בעלת זיכרון שכן לצורך חישוב התגובה ברגע t עלינו לדעת את ערך הכניסה ברגע מוקדם יותר.

הגדרה 2.2.8 מערכת נקראת סיבתית *Causal, Non anticipative* אם לכל t_0 ו-$t < t_0$, ערך היציאה $y(t)$ בזמן t תלוי בערכי הכניסה רק דרך הערכים בעבר ובהווה, כלומר ב-$\{x(s),\ s < t_0\}$.
מערכת נקראת אנטי סיבתית אם כאשר נהפוך את ציר הזמן נקבל מערכת סיבתית.

דוגמה 2.2.9 מתכונות מ.ד.ר, היא מתארת מערכת סיבתית (למרות שאפשר להשתמש בה גם לתאור מערכת אנטי-סיבתית, כלומר כזו שהיציאה תלויה רק בהווה ובעתיד).
המערכות מדוגמה *2.2.7* הן כולן סיבתיות, אך המערכת

$$y(t) = x(t+1) \tag{2.2.4}$$

בברור אינה סיבתית שכן ערך התגובה תלוי בערך עתידי של הכניסה.
המערכת

$$y = \frac{dx}{dt} \tag{2.2.5}$$

היא סיבתית לפי הגדרתינו. למעשה, ההגדרה מסובכת מאשר נראה נחוץ בדיוק כדי לאפשר התייחסות למערכות מסוג זה: כדי לדעת את ערך הנגזרת ברגע t עלינו לדעת את ערכי $x(s)$ סביב t, אך גם מעט לאחר t. נשים לב כי המערכת (2.2.5) היא סיבתית וגם אנטי סיבתית, אך היא אינה חסרת זכרון כיוון שהתגובה אינה תלויה רק בערך הרגעי של הכניסה, אלא גם בערכים סביב t.

רוב המערכות הפיזיקליות הן כמובן סיבתיות. אולם לעיתים נוח לבנות מודלים שאינם סיבתיים. בהקשר של עיבוד תמונות, כמובן שמושג הסיבתיות אינו רלוונטי. אך גם באותות אחרים, אם למשתנה t אין מובן פיזיקלי של זמן, אזי תיתכן מערכת פיזיקלית שאינה סיבתית.

הגדרה 2.2.10 מערכת נקראת לינארית אם לכל זוג אותות כניסה x_1, x_2 וקבועים α, β מתקיים

$$\Phi(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha\Phi(x_1) + \beta\Phi(x_2).$$

כלומר, התגובה לסכום כניסות היא סכום התגובות לכניסות הנפרדות.

משוואה דיפרנציאלית אינה מתארת בדרך כלל מערכת לינארית ביחס לכניסה, בגלל השפעת תנאי ההתחלה. (כדי לראות זאת, נחשוב על (2.1.1) כאשר $b_m = 0$ לכל m ותנאי ההתחלה שונים מאפס). דרך אחת לקבל מערכת לינארית היא על ידי התייחסות למערכות בתנאי התחלה אפס, כלומר התייחסות לפתרון y_{ZSR} בלבד. לדרך זו יש חסרון: אנו נאלצים לבחור זמן קבוע בו מוגדרים תנאי ההתחלה. נתגבר על כך דרך המושגים הבאים.

הגדרה 2.2.11 אות חד צדדי. נקרא לאות $x(t)$ חד צדדי ימני אם קיים זמן t_x (התלוי באות) כך ש-$x(s) = 0$ לכל $s < t_x$. בצורה דומה נגדיר אות חד צדדי שמאלי.

אם לא נתייחס במפורש לזמן t_x אזי הכוונה היא ש-$t_x = 0$. לדוגמה אות חד צדדי ימני הוא אות המתאפס משמאל ל-0.

הגדרה 2.2.12 נאמר שמערכת המתוארת על ידי מ.ד.ר היא במנוחה התחלתית *(Initially At Rest)* אם תגובת המערכת לאות ימני המתאפס עבור $s < t_x$ היא אפס עד תחילת הכניסה, כלומר היא מקיימת $y(s) = 0$ עבור $s < t_x$.

טענה 2.2.13 מ.ד.ר הנמצאת במנוחה התחלתית מתארת מערכת לינארית.

הוכחה: נשים לב כי סכום אותות ימניים הוא אות ימני. מהגדרת מערכת במנוחה התחלתית, תנאי ההתחלה הם אפס עבור זמן מוקדם מספיק. לכן הלינאריות נובעת מטענה 2.1.2. מ.ש.ל.

מערכת היא לינארית אם ורק אם היא מקיימת את שתי התכונות הבאות:

אדיטיביות (Additivity): $\Phi(x_1 + x_2) = \Phi(x_1) + \Phi(x_2)$, ו-

הומוגניות Homogeneity: $\Phi(\alpha x) = \alpha\Phi(x)$

לדוגמה, המערכת $y = Re[x]$ אשר היציאה בה היא החלק הממשי של הכניסה, מקיימת את תכונת האדיטיביות. אולם אם α הוא מספר מרוכב אזי $Re[\alpha x] \neq \alpha Re[x]$ שכן צד שמאל הוא מספר ממשי וצד ימין מספר מרוכב. לכן זו אינה מערכת לינארית במצב שאנו מתירים מקדמים מרוכבים.

הערה מתמטית: שימו לב כי שאלת הלינאריות דורשת לא רק מידע לגבי המערכת, אלא גם לגבי הסקלרים המותרים: ממשיים, מרוכבים, וכו'. אנו נניח סקלרים מרוכבים אלא אם נאמר אחרת.

תכונת הלינאריות היא תכונה בעלת משמעות רבה. היא תאפשר לנו בין השאר לנתח תגובה לאותות מסובכים על ידי פירוקם לאוסף של אותות פשוטים יותר.

המערכת $y = a \cdot x + b$ אינה לינארית אם $b \neq 0$, כיוון ש-

$$\Phi(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) + b \neq ax_1 + b + ax_2 + b = \Phi(x_1) + \Phi(x_2).$$

הגדרה 2.2.14 מערכת נקראת אפינית *Affine* אם קיימת מערכת לינארית Ψ כך ש-$\Phi[x] - \Phi[y] = \Psi[x - y]$.

המערכת $y = a \cdot x + b$ לעיל היא אפינית---$\Psi(x) = ax$. המערכת המתוארת על ידי (2.1.1) עם תנאי התחלה קבועים ונתונים היא מערכת אפינית: אם נחשב תגובה לשני אותות כניסה, כאשר תנאי ההתחלה הם זהים, אזי ההפרש יקיים את (2.1.1) עבור תנאי התחלה אפס---וזו כידוע מערכת לינארית.

הגדרה 2.2.15 נסמן ב-σ^s אופרטור המזיז את האות בזמן בכמות s, כלומר

$$\sigma^s x(t) \doteq x(t + s). \tag{2.2.6}$$

מערכת נקראת קבועה בזמן *Time Invariant—TI* אם

$$\Phi(\sigma^s x) = \sigma^s \Phi(x) \tag{2.2.7}$$

כלומר התגובה לכניסה מוזזת היא התגובה המקורית, מוזזת באותה כמות.

באופן מתמטי, מערכת היא קבועה בזמן אם המיפוי שלה מתחלף עם אופרטור ההזזה.

רוב המערכות בהן נעסוק הן מערכות לינאריות קבועות בזמן (לק"ב)---מערכות Linear Time Invariant (LTI).

המערכת $\Phi(x)(t) = t \cdot x(t)$ כמובן אינה קבועה בזמן. מצד שני,

טענה 2.2.16 מ.ד.ר הנמצאת במנוחה התחלתית מתארת מערכת קבועה בזמן.

הוכחה: נקבע s ונשים לב כי אם x הוא אות ימני אזי גם $\sigma^s x$ הוא אות ימני. נסמן ב-$y = \Phi x$. קל לראות כי $\sigma^s y$ פותר את (2.1.1) עבור כניסה $\sigma^s x$. מ.ש.ל.

נזכר כי D מסמן את אופרטור הגזירה.

טענה 2.2.17 עבור מערכת מד"ר במנוחה התחלתית, התגובה לנגזרת הכניסה היא נגזרת התגובה, כלומר

$$\Phi\left(\frac{d}{dt}x\right) = \frac{d}{dt}\Phi(x)\,. \tag{2.2.8}$$

כלומר אופרטור הגזירה מתחלף עם אופרטור המערכת.

הוכחה: נשים לב כי אם הכניסה x מתאפסת עד רגע מסויים, נאמר t_0, אזי כך גם dx/dt. נסמן ב-$y = \Phi(x)$ את התגובה לכניסה x. נציב $x_1 = dx/dt$ ו-$y_1 = dy/dt$ ב-(2.1.1) ונקבל שהכניסה x_1 והתגובה y_1 מקיימים את המשוואה. מ.ש.ל.

הגדרה 2.2.18 מערכת מיפוי כניסה יציאה Φ נקראת הפיכה אם קיימת מערכת מיפוי Ψ בין מרחב אותות היציאה למרחב אותות הכניסה, המשחזרת את אות הכניסה. כלומר, אם קיימת מערכת כך שלכל x

$$\Psi(\Phi[x]) = x\,. \tag{2.2.9}$$

דוגמה 2.2.19 המערכת הטריוואלית

$$\Phi(x) = x \tag{2.2.10}$$

היא ודאי הפיכה. המערכת

$$y(t) = x^n(t-1) \tag{2.2.11}$$

היא הפיכה לכל n אי זוגי, אך אינה הפיכה עבור n זוגי. המערכת

$$y(t) = \frac{x(t)}{dt} \tag{2.2.12}$$

אינה הפיכה שכן

$$\Phi[x] = \Phi[x+\alpha] \tag{2.2.13}$$

ולכן ברור שלא ניתן לשחזר את x מתוך ידיעת y. המערכת

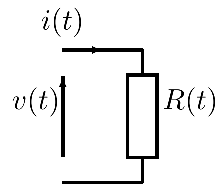
$$\frac{dy(t)}{dt} = x \tag{2.2.14}$$

הנמצאת במנוחה התחלתית היא הפיכה אם מרחב אותות הכניסה הוא אוסף האותות הימניים.

לסיכום, ראינו כי מערכת המתוארת על ידי מד"ר, הנמצאת במנוחה התחלתית, מתארת מערכת דינמית בזמן רציף, שהיא מיפוי כניסה יציאה, SISO, בעלת זיכרון, סיבתית, לינארית וקבועה בזמן, אשר אינה בהכרח הפיכה.

2.3 דוגמה מסכמת למשוואות דיפרנציאליות ותכונות של מערכות

נתבונן במערכת בה הכניסה היא זרם i המועבר דרך נגד R. התגובה היא מתח הנגד v.



איור 2.2: דוגמה: מערכת חשמלית

הקשר בין הזרם והמתח נתון על ידי

$$v(t) = R(t)i(t). \tag{2.3.1}$$

ננתח את תכונות המערכות עבור סוגים שונים של נגדים.

I. $R = R_0$ קבוע.

מערכת זו חסרת זכרון, קבועה בזמן, ולינארית.

II. $R(t) = R_0 + f(t)$ כאשר $f(t)$ מתארת את שינוי ההתנגדות עקב הזדקנות הנגד.

במערכת זו ערך התגובה תלוי בכניסה רק דרך ערכה הנוכחי, ולכן המערכת חסרת זכרון. המערכת אינה קבועה בזמן שכן לפי (2.3.1),

$$\sigma^s\Phi[i](t) = \sigma^s v(t) = \sigma^s[(R_0 + f(t))i(t)] = (R_0 + f(t+s))i(t+s) \neq (R_0 + f(t))i(t+s) = \Phi[\sigma^s i](t). \tag{2.3.2}$$

נבדוק לינאריות:

$$\Phi[\alpha x_1 + \beta x_2](t) = (R_0 + f(t))(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) \tag{2.3.3}$$

$$= (R_0 + f(t))\alpha x_1(t) + (R_0 + f(t))\beta x_2(t) = \alpha\Phi[x_1](t) + \beta\Phi[x_2](t) \tag{2.3.4}$$

בדיוק לפי הגדרת הלינאריות.

III. $R(t) = R_0 + i^2(t)$. זהו נגד שערכו תלוי זרם. אם R_0 גדול מספיק אזי הנגד הוא בקירוב נגד רגיל עבור ערכי זרם קטנים, אך לא עבור ערכים גדולים.

מערכת זו היא חסרת זכרון. היא קבועה בזמן שכן

$$\sigma^s\Phi[i](t) = \sigma^s v(t) = \sigma^s[(R_0 + i^2(t))i(t)] = (R_0 + i^2(t+s))i(t+s) = \Phi[\sigma^s i](t). \tag{2.3.5}$$

נבדוק לינאריות:

$$\Phi[\alpha x_1 + \beta x_2](t) = (R_0 + (\alpha x_1(t) + \beta x_2(t))^2)(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) \tag{2.3.6}$$

$$\neq (R_0 + x_1^2(t))\alpha x_1(t) + (R_0 + x_2^2(t))\beta x_2(t) = \alpha\Phi[x_1](t) + \beta\Phi[x_2](t) \tag{2.3.7}$$

ולכן המערכת אינה לינארית.

IV. $R(t) = R_0 + \alpha \int_{-\infty}^{t} i^2(\tau)\, d\tau$.

ברור כי זאת מערכת עם זכרון. כמו בחישובים הקודמים ניתן לראות כי המערכת קבועה בזמן, אך אינה לינארית.

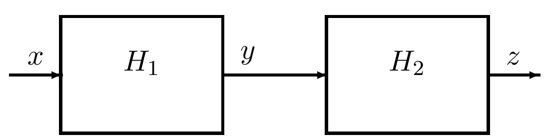
כיוון שכל התגובות תלויות רק בערכים קודמים של הכניסה, נובע כי כל המערכות סיבתיות.

2.4 מערכות: מעבר למשוואות דיפרנציאליות

מתבקשת השאלה מדוע לא להסתפק בתאור מערכות על ידי משוואות דיפנציאליות. מנסיונינו אנו יודעים כי ניתן לתאר כל מעגל חשמלי לינארי דרך משוואות כאלו. בקורס פיזיקה 1 למדנו כי ניתן לתאר תנועה של גופים על ידי משוואה דיפרנציאלית.

מעבר לחשיבות של תאור בתחום התדר, בסעיף זה נביא שיקול הנדסי חשוב לחפש כלים נוספים.

למהנדס חשוב לתאר מערכת כ"קופסה שחורה", אליה מכניסים אות כניסה ומקבלים אות תגובה. כדי להגיע לתכנון יעיל ולהשתמש בתכנונים קיימים, יש צורך בכלים המאפשרים חיבור של "קופסאות שחורות" כאלו. בצורה סכמתית, נניח שנתונות שתי מערכות אשר יסומנו ב-$H_1,\ H_2$. נניח שכל אחת מתוארת על ידי משוואה דיפרנציאלית בצורה (2.1.1). נגדיר חיבור מערכות בטור בצורה הבאה. אות הכניסה למערכת הראשונה, H_1, הוא x. תגובת המערכת היא y. תגובה זו מהווה כניסה למערכת השניה H_2, והמוצא מהמערכת השניה הוא z. נסמן חיבור זה בצורה הבאה:



איור 2.3: חיבור מערכות בטור

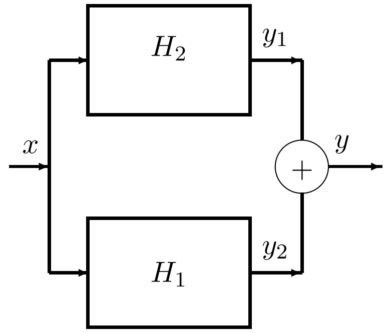
נחשוב על המערכת הכוללת, זו שכניסתה x והמוצא שלה הוא z. האם ניתן לתאר אותה בעזרת משוואה דיפרנציאלית? אם כן, מהו סדר המשוואה וכיצד לחשב את מקדמיה? אין לנו שיטה פשוטה לעשות זאת. נצטרך לפתור כל מערכת בנפרד, ואז לחשב את התגובה המשולבת. שיטה זו טובה לכניסה מסוימת אך אינה נותנת תאור של המערכת הכוללת.

חיבור במקביל מתואר בצורה סכימתית בשרטוט הבא.

כאן לשתי המערכות כניסה משותפת. נגדיר מערכת מסכמת אשר המוצא שלה הוא $y_1 + y_2$. האם ניתן לתאר אותה בעזרת משוואה דיפרנציאלית? אם כן, מהו סדר המשוואה וכיצד לחשב את מקדמיה?

באופן כללי, כיצד ניתן לתאר את המערכת המתקבלת מחיבור מערכות כאילו? כמובן שנרצה כלי שיאפשר חיבור כללי ומורכב יותר.

כאשר נלמד בפרק 3 על מערכות קונוולוציה, נראה כי בייצוג זה קל לתאר חיבור בטור וחיבור במקביל (עם סיכום) של מערכות. נוכל לכן לקבל מערכות המתוארות על ידי מד"ר, לחשב את הייצוג שלהן כמערכות



איור 2.4: חיבור מערכות במקביל

קונוולוציה, ובכך לפתור את בעית היצוג של חיבור מערכות. אך גם לשיטה זו יש מגבלות כפי שנראה בהמשך.
תיאור המערכת בתחום התדר (פרקים 5--6) נותן כלי כללי ונוח לטיפול בחיבורי מערכות מסוג זה.