פרק 6

התמרת לפלס

בסעיף 5.1 ראינו כי אות אקספוננציאלי הוא "אות עצמי" של מערכות לנאריות. עד כה השתמשנו בעובדה זו לניתוח בתחום התדר. הדבר מתאים לאותות דועכים---וכבר בפונקצית מדרגה הטיפול במישור התדר בעייתי, ונאלצנו להשתמש באותות מוכללים. **התמרת לפלס** Laplace transform נותנת כלי חשוב לטיפול פשוט יותר במשפחה רחבה של אותות. בפרט, התמרת לפלס חד צדדית (שהיא ההתמרה אותה לומדים בקורס "טורי פוריה והתמרות אינטגרליות") נותנת כלי לטיפול במשוואות דיפרנציאליות רגילות, כולל התחשבות בתנאי התחלה. נעסוק תחילה בהתמרה הדו-צדדית.

6.1 התמרת לפלס דו צדדית

התמרת לפלס דו צדדית משמשת כלי חשוב לניתוח מערכות כניסה-יציאה לינאריות וקבועות בזמן.

הגדרה 6.1.1 התמרת לפלס דו-צדדית של אות x מוגדרת עבור ערכים של המשתנה המרוכב s עבורם

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-(\Re e\, s)t}\, dt < \infty \,. \tag{6.1.1}$$

ואז ההתמרה היא

$$X(s) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st}\, dt \,. \tag{6.1.2}$$

תחום ההגדרה, או תחום ההתכנסות (*ROC: Region Of Converngence*) הוא אוסף הערכים של s עבורם ההתמרה מוגדרת, כלומר עבורם מתקיים אי השוויון (6.1.1), נסמן את הקשר בין x להתמרה X כך:

$$x \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X \;, \quad X(s) = \mathcal{L}[x](s) \,. \tag{6.1.3}$$

דוגמה 6.1.2 ראשית נשים לב כי לאות $x(t) \equiv 3$ אין התמרת לפלס דו צדדית, שכן תחום ההתכנסות אינו כולל שום s. נחשב אם כן התמרה של האות הימני

$$x(t) = e^{at} u(t) \tag{6.1.4}$$

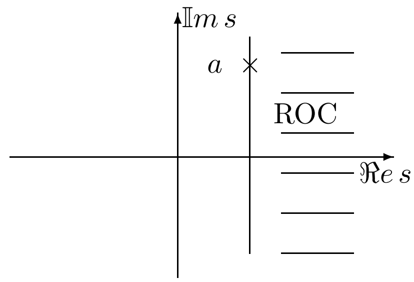
כאשר u היא פונקצית המדרגה. עבור הבחירה $a = 0$ האות x הוא פונקצית המדרגה.

$$X(s) = \mathcal{L}[x](s) \tag{6.1.5}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{at} u(t) e^{-st}\, dt \tag{6.1.6}$$
$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(s-a)t}\, dt\,. \tag{6.1.7}$$

אינטגרל זה מתכנס אם ורק אם $\Re e\,(s-a) > 0$, ולכן זהו תחום ההתכנסות של התמרה. בתחום זה

$$X(s) = \left.\frac{1}{-(s-a)} e^{-(s-a)t}\right|_{t=0}^{\infty} \tag{6.1.8}$$
$$= \frac{1}{s-a}\,. \tag{6.1.9}$$

קיבלנו ש-$e^{at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1/(s-a)$ עם תחום התכנסות $\Re e\, s > \Re e\, a$. בפרט, $u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1/s$ עם תחום התכנסות $\Re e\, s > 0$. נשים לב כי בתחום ההתכנסות איננו כוללים את הגבול $\Re e\, s = 0$; כך מוגדר התחום באופן כללי.



איור 6.1: תחום התכנסות לאות אספוננציאלי ימני

נחשב כעת התמרה של אות אחר:

דוגמה 6.1.3 כעת נבחר אות שמאלי

$$x(t) = -e^{at}u(-t)\,. \tag{6.1.10}$$

לפי ההגדרה

$$X(s) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{at} u(-t) e^{-st}\, dt \tag{6.1.11}$$
$$= -\int_{-\infty}^{0} e^{(a-s)t}\, dt\,. \tag{6.1.12}$$

במקרה זה t מקבל ערכים שליליים בלבד. לכן האינטגרל יתכנס אם ורק אם $\Re e\,(a-s) > 0$. בתחום זה של ערכי s

$$X(s) = \left.\frac{-1}{(a-s)} e^{(a-s)t}\right|_{t=-\infty}^{0} \tag{6.1.13}$$
$$= \frac{1}{s-a}\,. \tag{6.1.14}$$

תחום הקיום של התמרה זו הוא $\Re e\,(s) < a$.

החישוב בשתי הדוגמאות לעיל נותן כי התמרת לפלס בשני המקרים היא הפונקציה $X(s) = 1/(s-a)$, וזאת למרות שהאותות שונים לחלוטין. אכן, כדי לשמור על קשר יחיד בין אות להתמרתו עלינו לכלול מידע על תחום ההתכנסות.

דוגמה 6.1.4 נחשב התמרה עבור האות הדו צדדי

$$x(t) = e^{at}u(t) + e^{bt}u(-t)\,. \tag{6.1.15}$$

חישוב כמו בדוגמאות הקודמות מביא למסקנה כי

$$X(s) = \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}\,, \tag{6.1.16}$$

$$ROC = \{\Re e\,(s) > a\} \cap \{\Re e\,(s) < b\}\,. \tag{6.1.17}$$

לכן ההתמרה קיימת אם ורק אם $a < b$. אם תנאי זה מתקיים אזי תחום הקיום הוא $a < \Re e\,(s) < b$, כלומר רצועה אנכית במישור המרוכב. אם התנאי אינו מתקיים אזי אין התמרת לפלס לאות זה.

הגדרה 6.1.5 פונקציה X נקראת רציונלית אם היא מנה של שני פולינומים

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \tag{6.1.18}$$

מצומצמים (כלומר ללא גורם משותף). אפסי $X(s)$ הם האפסים של $N(s)$, והקטבים של $X(s)$ הם האפסים של $D(s)$.

משפט 6.1.6 לתחום ההתכנסות יש את התכונות הבאות.

1. גבול תחום ההתכנסות הוא קווים מקבילים לציר $j\omega$.
2. אם

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \tag{6.1.19}$$

היא פונקציה רציונלית אזי

- ה-ROC אינו כולל קטבים של $X(s)$
- לפונקציות ימניות ה-ROC הוא מהקוטב הימני ביותר וימינה,
- לפונקציות שמאליות ה-ROC הוא מהקוטב השמאלי ביותר ושמאלה,
- לפונקציות דו צדדיות ה-ROC הוא חיתוך של שני חצאי מישור ולכן הוא תמיד פס---או רצועה---במישור המרוכב.

3. אם $x(t)$ הוא בעל תמך סופי, כלומר קיים B כך ש-$x(t) = 0$ עבור $|t| > B$, אזי תחום ההגדרה הוא כל s או אף s.
4. לפונקציות ימניות תחום ההגדרה הוא חצי מישור ימני. לפונקציה שמאלית---חצי מישור שמאלי.

הוכחה: לפי הגדרת תחום ההתכנסות, הוא אינו תלוי בחלק המדומה של s.
נניח ש-s_1 וגם s_2 הם בתחום ההתכנסות, ובגלל הסעיף הקודם נוכל להניח ששניהם ממשיים. נניח $s_1 < s_2$. נראה כי אם $s_1 < s < s_2$ אזי גם s הוא בתחום ההתכנסות. ואכן, לכל t,

$$e^{-st} < e^{-s_1 t} + e^{-s_2 t}\,. \tag{6.1.20}$$

מכאן נובע כי

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| s^{-st}\,dt \le \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| s^{-s_1 t}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| s^{-s_2 t}\,dt < \infty \tag{6.1.21}$$

ולכן s הוא בתחום ההתכנסות. כלומר תחום ההתכנסות הוא קשיר (כלומר הוא תחום רצוף). מאי השוויון השמאלי ב-(6.1.21) נובע שלא יתכן קוטב בתחום ההתכנסות, שכן קרוב לקוטב הגודל של $X(s)$ אינו חסום.
כיוון שעבור $t \ge 0$ מתקיים עבור $s_1 < s_2$

$$e^{-s_1 t} \ge e^{-s_2 t}\,, \tag{6.1.22}$$

נובע כי

$$\int_{0}^{\infty} |x(t)| s^{-s_1 t}\,dt > \int_{0}^{\infty} |x(t)| s^{-s_2 t}\,dt \tag{6.1.23}$$

ולכן תחום ההתכנסות לאות ימני הוא חצי מישור. לפי הגדרת הקוטב, הגבול השמאלי של תחום ההתכנסות הוא הקוטב הראשון---כלומר הקוטב הימני ביותר. בצורה דומה נראה כי תחום ההתכנסות לאות שמאלי הוא מהקוטב השמאלי ושמאלה.
באותה צורה נסיק מ-(6.1.21) שתחום ההתכנסות הוא באופן כללי רצועה. לאות רציונלי הרצועה תהיה בין זוג קטבים.
נניח של-$x(t)$ תמך סופי המוכל בתחום $[-B, B]$. נקבע s_0 כלשהוא ונחשב את התנאי ש-$s_0 \neq s$ נמצא בתחום ההתכנסות.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-st}\,dt &= \int_{-B}^{B} |x(t)| e^{-st}\,dt && (6.1.24)\\
&= \int_{-B}^{B} |x(t)| e^{-s_0 t} e^{(s_0 - s)t}\,dt && (6.1.25)\\
&\le \int_{-B}^{B} |x(t)| e^{-s_0 t}\,dt \left[e^{(s_0 - s)B} + e^{-(s_0 - s)B} \right]. && (6.1.26)
\end{aligned}$$

מכיוון שהביטוי האחרון בסוגריים מרובעות הוא תמיד סופי, נובע שאם s_0 בתחום ההתכנסות אזי כך גם s. כיוון שתוצאה זו נכונה לכל s_0 קיבלנו שתחום ההתכנסות הוא כל s או אף s. מ.ש.ל.

משפט 6.1.7 ההתמרה היא פעולה לינארית, כלומר

$$\alpha x + \beta y \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \alpha X + \beta Y \tag{6.1.27}$$

ותחום הקיום מכיל לפחות את $ROC_x \cap ROC_y$.

הוכחה: נובע מיידית מלינאריות האינטגרל. מ.ש.ל.

חשוב להדגיש כי תחום הקיום יכול להיות גדול יותר. לדוגמה נבחר $x = y$ כלשהם ו-$\alpha = 1 = -\beta$. אזי $\alpha x + \beta y = 0$ ולאות זה יש התמרה לכל s.

משפט 6.1.8 $x * y \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s)Y(s)$. תחום ההתכנסות מכיל לפחות את $ROC_x \cap ROC_y$.

הוכחה: לפי הגדרת ההתמרה והקונוולוציה,

$$\mathcal{L}(x*y)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)\,d\tau\right] e^{-st}\,dt \tag{6.1.28}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau)e^{-st}\,dt\right] d\tau \tag{6.1.29}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}\,dt\right] e^{-s\tau}\,d\tau \tag{6.1.30}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-s\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(u)e^{-su}\,du\right] d\tau \tag{6.1.31}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau\, Y(s) \tag{6.1.32}$$

$$= X(s)Y(s)\,. \tag{6.1.33}$$

החישוב תקף כמובן אם s נמצא בתחום ההתכנסות של שתי ההתמרות. מ.ש.ל.

גם כאן תחום ההתכנסות יכול להיות גדול יותר.

התמרת לפלס של דלתה מוזזת היא

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)](s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\delta(t-a)\,dt = e^{-sa}\,. \tag{6.1.34}$$

נזכר כי ניתן לייצג השהיה דרך קונוולוציה עם דלתה מוזזת.

משפט 6.1.9 $x(t-a) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} e^{-sa}X(s)$ ותחום ההתכנסות הוא כמו של X.

הוכחה:

$$\mathcal{L}[x(t-a)](s) = \mathcal{L}[(x(t) * \delta(t-a)](s) = X(s)e^{-sa}\,. \tag{6.1.35}$$

באשר לתחום ההתכנסות, הוא ללא שינוי בגלל המשפט הקודם שכן תחום ההתכנסות של δ הוא כל s. מ.ש.ל.

דוגמה 6.1.10 נחשב התמרה של פולס מרובע ברוחב T:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \tag{6.1.36}$$

ניתן ליצג את האות על ידי $x(t) = u(t) - u(t-T)$. לפי ההגדרה של ההתמרה

$$\mathcal{L}[x](s) = \mathcal{L}[u(t) - u(t-T)](s) \tag{6.1.37}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-sT} \tag{6.1.38}$$

$$= \frac{1}{s}\left(1 - e^{-sT}\right)\,. \tag{6.1.39}$$

ההתמרה של אות המוכפל באקספוננט היא

$$\mathcal{L}[e^{at}x(t)](s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{at}e^{-st}\,dt \tag{6.1.40}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(s-a)t}\,dt \tag{6.1.41}$$

$$= X(s-a)\,, \tag{6.1.42}$$

ותחום ההתכנסות מוגדר דרך $s-a \in ROC_x$.

משפט 6.1.11 אם $\lim_{|t|\to\infty} x(t)e^{-st} = 0$ אזי

$$\frac{dx}{dt} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} sX(s)\,. \tag{6.1.43}$$

תחת תנאים טכניים דומים,

$$\frac{d^n x}{dt^n} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} s^n X(s)\,. \tag{6.1.44}$$

תחום ההתכנסות הוא ללא שינוי (בהנחה שהתנאי הטכני מתקיים לכל s שבתחום ההתכנסות).

הוכחה: אינטגרציה בחלקים:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\dot{x}(t)\,dt \tag{6.1.45}$$

$$= x(t)e^{-st}\big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} se^{-st}x(t)\,dt \tag{6.1.46}$$

$$= 0 + sX(s) \tag{6.1.47}$$

בגלל ההנחה. בצורה דומה נקבל את הביטוי השני. מ.ש.ל.

משפט 6.1.12 התמרה של אינטגרל לא מסויים:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{X(s)}{s} \tag{6.1.48}$$

ותחום ההתכנסות הוא

$$ROC_x \cap \{\Re e\,(s) > 0\}\,. \tag{6.1.49}$$

הוכחה: כפי שעשינו עבור התמרת פוריה

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right](s) = \mathcal{L}[x * u](s) \tag{6.1.50}$$

$$= X(s)\frac{1}{s}\,. \tag{6.1.51}$$

מ.ש.ל.

משפט 6.1.13 גזירה במשתנה s:

$$-tx(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{d}{ds}X(s)\,. \tag{6.1.52}$$

הוכחה:

$$\int_{-\infty}^{\infty} -tx(t)e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{ds}x(t)e^{-st}\,dt \tag{6.1.53}$$

$$= \frac{d}{ds}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt \tag{6.1.54}$$

$$= \frac{d}{ds}X(s)\,. \tag{6.1.55}$$

מ.ש.ל.

דוגמה 6.1.14 נחשב את ההתמרה של $te^{at}u(t)$.

$$\mathcal{L}\left[te^{at}u(t)\right] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s-a}\right] \tag{6.1.56}$$

$$= \frac{1}{(s-a)^2}\ , \Re e\,(s) > a\,. \tag{6.1.57}$$

בצורה דומה נקבל

$$t^k e^{at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{k!}{(s-a)^{k+1}} \quad \Re e\,(s) > a\,, \tag{6.1.58}$$

$$t^k e^{at}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{-k!}{(s-a)^{k+1}} \quad \Re e\,(s) < a\,. \tag{6.1.59}$$

משפט 6.1.15 שינוי סקלה: עבור α ממשי

$$x(\alpha t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{|\alpha|}X\left(\frac{s}{\alpha}\right) \quad \frac{s}{\alpha} \in ROC_x\,. \tag{6.1.60}$$

הוכחה:

$$X\left(\frac{s}{\alpha}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\frac{s}{\alpha}t}\,dt \tag{6.1.61}$$

$$= |\alpha|\int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha\tau)e^{-s\tau}\,d\tau \tag{6.1.62}$$

$$= |\alpha|\mathcal{L}[x(\alpha t)](s)\,. \tag{6.1.63}$$

מ.ש.ל.

6.2 התמרה הפוכה

כמו בתאוריה של התמרת פוריה, יש קשר חד חד ערכי בין האות לבין ההתמרה (כולל מידע על תחום ההתכנסות). לכן בדרך כלל נוכל להשתמש במידע קיים (טבלאות, פיתוחים קודמים) על מנת לשחזר את האות מתוך התמרת לפלס ותחום ההתכנסות שלה. אך בסעיף זה נראה כיצד לחשב את ההתמרה ההפוכה במספר דרכים.

6.2.1 נוסחת התמרה הפוכה

נניח שלאות $x(t)$ יש התמרת לפלס $X(s)$. נסמן את המשתנה המרוכב $s = \sigma + j\omega$ כסכום של חלקו הממשי וחלקו המדומה. לפי ההגדרה של ההתמרה (6.1.1) עבור σ בתחום ההתכנסות,

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}\,dt\,. \tag{6.2.1}$$

זוהי בדיוק התמרת פוריה של $e^{-(\sigma t)}x(t)$. נשים לב כי $e^{-(\sigma t)}x(t)$ הוא אות ב-L_1 משום ש-

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-(\sigma t)}x(t)\right|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|e^{-\Re e\,(st)}\,dt < \infty \tag{6.2.2}$$

כאשר השוויון האחרון נובע מהעובדה כי ל-x יש התמרת לפלס. אם כך (בתנאים טכניים מתאימים) ניתן להשתמש בנוסחת התמרת פוריה ההפוכה, בצורה הבאה. נקבע ערך כלשהו של σ בתחום ההתכנסות של התמרת לפלס ונחשב

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}\,ds = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma+j\omega)e^{\sigma t}e^{j\omega t}\,jd\omega \tag{6.2.3}$$

$$= e^{\sigma t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma+j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$= e^{\sigma t}\mathcal{F}^{-1}[X(\sigma+j\omega](t) \tag{6.2.4}$$

כאשר בהתמרה ההפוכה σ הוא קבוע. אבל

$$X(\sigma + j\omega) = \mathcal{F}[e^{-\sigma t}x(t)] \tag{6.2.5}$$

ולכן

$$e^{-\sigma t}x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\sigma + j\omega)] \tag{6.2.6}$$

$$x(t) = e^{\sigma t}\mathcal{F}^{-1}[X(\sigma + j\omega)] \tag{6.2.7}$$

$$= e^{\sigma t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma+j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega\,. \tag{6.2.8}$$

השיווין האחרון נותן לנו נוסחה להתמרה הפוכה, כאשר את σ עלינו לבחור כך שתהיה בתחום ההתכנסות. משוויון זה ומשוואות (6.2.3)--(6.2.4) נקבל את נוסחת ההתמרה ההפוכה

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}\,ds \tag{6.2.9}$$

כאשר, כפי שראינו בפרק אודות התמרת פוריה, השוויון מתקיים בנקודות רציפות, ותחת תנאים מתאימים.

על מנת להשתמש בנוסחה זו יש לודא שאכן ניתן להפעיל את נוסחת האינטגרל עבור התמרת פוריה ההפוכה.

6.2.2 פיתוח לשברים חלקיים

במקרים רבים ההתמרה היא פונקציה רציונלית, כלומר מהצורה

$$X(s)=\frac{b_Ms^M+b_{M-1}s^{M-1}+\ldots+b_1s+b_0}{s^N+a_{N-1}s^{N-1}+\ldots+a_1s+a_0}\,. \tag{6.2.10}$$

אם $M\geq N$ אפשר לרשום משוואה זו בצורה

$$X(s)=C_{M-N}s^{M-N}+C_{M-N-1}s^{M-N-1}+\ldots+C_1s+C_0+\frac{\tilde{b}_{N-1}s^{N-1}+\tilde{b}_{N-2}s^{N-2}+\ldots+\tilde{b}_1s+\tilde{b}_0}{s^N+a_{N-1}s^{N-1}+\ldots+a_1s+a_0}\,. \tag{6.2.11}$$

כעת נוכל להשתמש בלינאריות של ההתמרה (ולכן גם של ההתמרה ההפוכה). נפרק את השבר לגורמים מהצורה

$$\frac{Cs^l}{(s-\lambda_i)^k} \tag{6.2.12}$$

(כאשר ה-λ_i הם אפסי המכנה, או הקטבים של X) ונשתמש בעובדות הבאות.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-\lambda_i)^k}\right)=\begin{cases}\frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}e^{\lambda_it}u(t) & \text{אות ימני}\\ \frac{-1}{(k-1)!}t^{k-1}e^{\lambda_it}u(-t) & \text{אות שמאלי}\end{cases} \tag{6.2.13}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(1\right)=\delta(t)\,. \tag{6.2.14}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(sZ(s)\right)=\frac{d}{dt}z(t)\,. \tag{6.2.15}$$

בשיטה זו נוכל למצוא את ההתמרה ההפוכה של כל פונקציה רציונלית.

דוגמה 6.2.1 נפרק לשברים חלקיים על ידי השוואת מקדמים: נרשום

$$\frac{s^2+as+b}{(s-\lambda_1)^2(s-\lambda_2)}=\frac{c_1}{(s-\lambda_1)^2}+\frac{c_2}{(s-\lambda_1)}+\frac{c_3}{s-\lambda_2}\,. \tag{6.2.16}$$

את צד ימין נרשום בעזרת מכנה משותף $(s-\lambda_1)^2(s-\lambda_2)$ ונקבל

$$\frac{s^2+as+b}{(s-\lambda_1)^2(s-\lambda_2)}=\frac{c_1(s-\lambda_2)+c_2(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)+c_3(s-\lambda_1)^2}{(s-\lambda_1)^2(s-\lambda_2)} \tag{6.2.17}$$

ומכאן על ידי השוואת מקדמים נקבל את הערכים: זאת בשיטה הבאה. נכפיל את שני האגפים ב-$(s-\lambda_1)^2(s-\lambda_2)$ ונקבל

$$s^2+as+b=c_1(s-\lambda_2)+c_2(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)+c_3(s-\lambda_1)^2\,. \tag{6.2.18}$$

כעת אם נציב $s=\lambda_1$ נקבל

$$\lambda_1^2+a\lambda_1+b=c_1(\lambda_1-\lambda_2) \tag{6.2.19}$$

כיוון ששני האברים האחרונים מתאפסים. מכאן נקבל את c_1

$$c_1=\frac{\lambda_1^2+a\lambda_1+b}{\lambda_1-\lambda_2}\,. \tag{6.2.20}$$

כעת נציב $s = \lambda_2$ ב-(6.2.18) ונקבל

$$\lambda_2^2 + a\lambda_2 + b = c_3(\lambda_2 - \lambda_1)^2 \tag{6.2.21}$$

כיוון שכעת שני האברים הראשונים מתאפסים, לכן

$$c_3 = \frac{\lambda_2^2 + a\lambda_2 + b}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}\,. \tag{6.2.22}$$

החישוב של c_2 מורכב מעט יותר. אפשר כמובן להשתמש בערכים שחישבנו, להציב ב-(6.2.18) ולקבל את הערך החסר. שיטה יותר כללית מתחילה שוב ב-(6.2.18), אך במקום להציב נגזור את המשוואה לפי s:

$$\frac{d}{ds}[s^2 + as + b] = \frac{d}{ds}[c_1(s - \lambda_2) + c_2(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) + c_3(s - \lambda_1)^2] \tag{6.2.23}$$

$$2s + a = c_1 + c_2(s - \lambda_2 + s - \lambda_1) + 2c_3(s - \lambda_1) \tag{6.2.24}$$

כעת נציב $s = \lambda_1$ ונקבל

$$2\lambda_1 + a = c_1 + c_2(\lambda_1 - \lambda_2) \tag{6.2.25}$$

כיוון ששאר האברים מתאפסים, לכן

$$c_2 = \frac{2\lambda_1 + a - c_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\,. \tag{6.2.26}$$

בצורה שקולה, ניתן להשוות מקדמים ב-(6.2.18) ונקבל

$$c_3 + c_2 = 1 \tag{6.2.27}$$

$$-c_3 2\lambda_1 - c_2(\lambda_1 + \lambda_2) + c_1 = a \tag{6.2.28}$$

$$c_3\lambda_1^2 + c_2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2 c_1 = b\,. \tag{6.2.29}$$

ממערכת משוואות לינארית זו נחלץ את הקבועים c_1, c_2, c_3.

קיבלנו פירוק לשברים חלקיים. מכאן נשתמש במידע על תחום ההתכנסות ובטבלה כדי לקבל את ההתמרה ההפוכה.

ניתן גם לפרק בצורה השקולה

$$\frac{s^2 + as + b}{(s - \lambda_1)^2(s - \lambda_2)} = \frac{d_1 s + d_2}{(s - \lambda_1)^2} + \frac{3_2}{(s - \lambda_2)}\,. \tag{6.2.30}$$

שתי הצורות יופיעו בתירגולים.

לעיתים ניתן לייצג התמרות מורכבות בעזרת פונקציות רציונליות, ואז שוב להשתמש בתכונות ידועות. לדוגמה

דוגמה 6.2.2 נחשב התמרה הפוכה ל-

$$X(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \tag{6.2.31}$$

כאשר תחום ההתכנסות הוא $\Re e\, s > 0$ ו-$T > 0$. בתחום זה מתקיים $|e^{-sT}| < 1$. לכן אפשר לייצג את $X(s)$ בעזרת פיתוח לטור הנדסי:

$$\frac{1}{1-e^{-sT}} = 1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \dots \tag{6.2.32}$$

בגלל הלנאריות נבצע התמרה הפוכה איבר איבר ונקבל

$$x(t) = \delta(t) + \delta(t-T) + \delta(t-2T) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)\,. \tag{6.2.33}$$

אות זה נקרא "רכבת הלמים".

6.3 לפלס ומערכות

בסעיף זה נדון בשימושי התמרת לפלס דו צדדית לניתוח מערכות.

בסעיף 5.1 ראינו כי אם נכניס אות אקספוננציאלי $x(t) = e^{st}$ למערכת המתוארת על ידי מד"ר, אזי התגובה תהיה $H(s)e^{st}$, ואף קיבלנו ביטוי עבור H. נראה כעת דרך שונה להגיע ל-H, אשר תשפוך אור חדש על מהות פונקציה זו. נניח אם כן כי x הוא אות כניסה למערכת המתוארת על ידי מד"ר

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \tag{6.3.1}$$

אשר המוצא הוא y. נבצע התמרת לפלס לשני צידי המשוואה, ונשתמש בעובדה כי

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}x\right](s) = s^n X(s) \tag{6.3.2}$$

ונקבל

$$\sum_{n=0}^{N} a_n s^n Y(s) = \sum_{m=0}^{M} b_m s^m X(s) \tag{6.3.3}$$

$$Y(s)\sum_{n=0}^{N} a_n s^n = X(s)\sum_{m=0}^{M} b_m s^m \tag{6.3.4}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m s^m}{\sum_{n=0}^{N} a_n s^n}\,. \tag{6.3.5}$$

הביטוי $H(s) = Y(s)/X(s)$ נקרא פונקציית התמסורת של המערכת: הוא מתאר את הקשר בין כניסה ויציאה במישור לפלס. בפרט, כיוון ש-$\mathcal{L}(\delta) = 1$, הביטוי $H(s)$ הוא התמרת לפלס של התגובה להלם של המערכת.

משפט 6.3.1 מערכת המתוארת על ידי מד"ר היא יציבה $BIBO$ אם ורק אם $M \le N$ ובנוסף כל קטבי פונקצית התמסורת הם בעלי חלק ממשי שלילי ממש.

מערכת המתוארת על ידי פונקצית תמסורת רציונלית היא יציבה $BIBO$ אם ורק אם סדר המונה אינו גדול מסדר המכנה ובנוסף כל קטבי פונקצית התמסורת הם בעלי חלק ממשי שלילי ממש.

חשוב לשים לב כי אם יש צימצום בין מונה ומכנה, הגורם שהצטמצם אינו קוטב של המערכת, שכן בהגדרה קוטב הוא ערך של s אשר סביבו הפונקציה אינה חסומה. אם יש צימצום אזי הפונקציה תהיה רציפה שם.

הוכחה: נזכר בפירוק (6.2.11). אם $M > N$ אזי תגובת ההלם כוללת נגזרות של דלתה, וכבר ראינו כי זו אינה מערכת יציבה. נניח אם כן ש-$M \le N$. נזכר כי מערכת היא יציבה BIBO אם ורק אם תגובת ההלם היא אינטגרבילית. אבל כאן $H(s)$ היא רציונלית, ולכן על ידי פירוק לשברים חלקיים נקבל כי תגובת ההלם היא סכום של אותות מהצורה

$$Ct^k e^{\lambda_i t} u(t)\,. \tag{6.3.6}$$

החזקות λ_i הן הקטבים של H. לכן תגובת ההלם אינטגרבילית אם ורק אם כל האקספוננטים דועכים כאשר $t \to \infty$, וזה יקרה בדיוק כאשר $\Re e\,\lambda_i < 0$. הוכחת החלק השני זהה. מ.ש.ל.

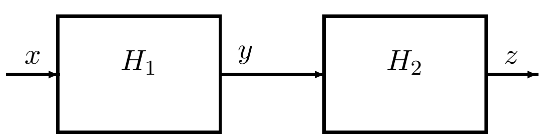
6.3.1 לפלס וחיבור מערכות

התמרת לפלס נותנת לנו כלי נוח לנתח חיבורים של מערכות. כיוון שהקשר בין כניסה ויציאה הוא אלגברי

$$Y(s) = H(s)X(s) \tag{6.3.7}$$

קל יחסית לנתח גם חיבורים מורכבים.

דוגמה 6.3.2 חיבור מערכות בטור מתואר על ידי השרטוט המצורף.



איור 6.2: חיבור מערכות בטור

נקבל מייד כי

$$Z(s) = H_2(s)Y(s) \tag{6.3.8}$$

$$= H_2(s)H_1(s)X(s) \tag{6.3.9}$$

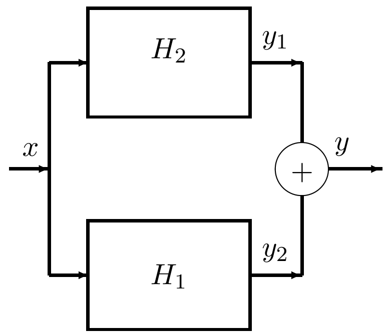
ולכן פונקצית התמסורת של המערכת הכוללת היא

$$H(s) = H_2(s)H_1(s)\,. \tag{6.3.10}$$

בפרט, נובע ממשפט *6.3.1* כי המערכת הכוללת H יציבה $BIBO$ אם ורק אם סכום סדר המונים של H_1 ו-H_2 קטן מסכום סדר המכנים, ואותם קטבים אשר אינם מצטמצמים עם אברי אחד המונים מקיימים $\Re e\,(s_i) < 0$. ברור אם

כך כי בהחלט יתכן כי אחת מהמערכות אינה יציבה (אם בגלל סדר המונה ואם בגלל מיקום קטבים), אולם המערכת הכוללת יציבה.

דוגמה 6.3.3 חיבור מערכות במקביל מתואר על ידי השרטוט המצורף.



איור 6.3: חיבור מערכות במקביל

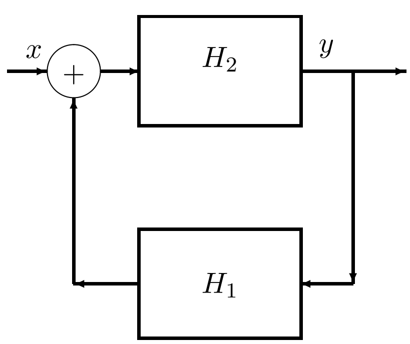
נחשב את פונקצית התמסורת הכוללת.

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) \tag{6.3.11}$$
$$= H_1(s)X(s) + H_2(s)X(s) \tag{6.3.12}$$
$$= (H_1(s) + H_2(s))X(s) \tag{6.3.13}$$

ולכן פונקצית התמסורת של המערכת הכוללת היא $H(s) = H_1(s) + H_2(s)$.

לבסוף, ננתח מערכת אשר עד כה לא יכולנו לתאר כראוי.

דוגמה 6.3.4 מערכת משוב מתוארת על ידי השרטוט המצורף.



איור 6.4: חיבור משוב

בפרט, המקרה החשוב ביותר הוא משוב יחידה שלילי, שעבורו $H_1(s) = -1$. פונקצית התמסורת הכוללת

מחושבת כך

$$Y(s) = H_2(s)[X(s) + H_1(s)Y(s)] \tag{6.3.14}$$

$$= H_2(s)X(s) + H_2(s)H_1(s)Y(s) \tag{6.3.15}$$

$$Y(s)[1 - H_2(s)H_1(s)] = H_2(s)X(s) \tag{6.3.16}$$

$$Y(s) = \frac{H_2(s)}{1 - H_2(s)H_1(s)}X(s) \tag{6.3.17}$$

וקבלנו את נוסחת מערכת המשוב: במקרה הכללי

$$H(s) = \frac{H_2(s)}{1 - H_2(s)H_1(s)} \tag{6.3.18}$$

ועבור משוב יחידה שלילי

$$H(s) = \frac{H_2(s)}{1 + H_2(s)}\,. \tag{6.3.19}$$

נניח שפונקציות התמסורת הן רציונליות, כלומר

$$H_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \tag{6.3.20}$$

$$H_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)} \tag{6.3.21}$$

כאשר $N_i(s), D_i(s)$ הם פולינומים ב-s. אזי

$$H(s) = \frac{H_2(s)}{1 - H_2(s)H_1(s)} \tag{6.3.22}$$

$$= \frac{\frac{N_2(s)}{D_2(s)}}{1 - \frac{N_2(s)}{D_2(s)}\frac{N_1(s)}{D_1(s)}} \tag{6.3.23}$$

נכפיל את המונה והמכנה ב-$D_2(s)D_1(s)$ ונקבל

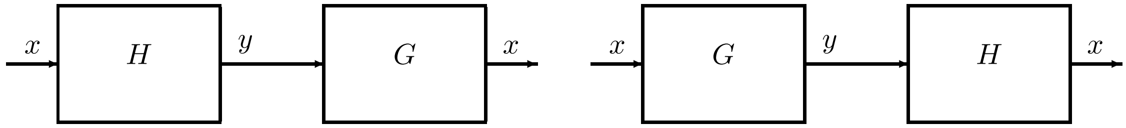
$$H(s) = \frac{N_2(s)D_1(s)}{D_2(s)D_1(s) - N_2(s)N_1(s)} \tag{6.3.24}$$

ובפרט עבור המקרה של משוב יחידה שלילי נקבל

$$H(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s) + N_2(s)}\,. \tag{6.3.25}$$

מביטוי זה ברור כי במערכת משוב (עם רכיבים רציונליים), סדר המונה של המערכת הכוללת תמיד אינו גדול מסדר המכנה, ובכך מתמלא אחד מתנאי היציבות. ברור גם כי ניתן להשפיע בצורה משמעותית על מיקום הקטבים על ידי בחירת משוב $H_1(s)$ מתאים.

במקרים רבים המערכת מתארת השפעה של גורמים שאין לנו שליטה עליהם (דינמיקה של מנוע, הנחתה ועיוותי פאזה של תווך מוליך וכד'). כדי לתקן עיוותים אילו ניתן לבנות מערכת מתאימה. בדרך כלל אנו מעוניינים במערכת הופכית.



איור 6.5: מערכת הופכית

הגדרה 6.3.5 בהנתן מערכת H המערכת G תקרא המערכת ההופכית אם מתקיים $GH = HG = I$ כאשר GH מסמן הפעלה של המערכת H על אות הכניסה ולאחר מכן הפעלת G על התוצאה. I היא המערכת אשר יציאתה שווה לכניסה. המערכת ההופכית של H תסומן ב-H^{-1}.

ההגדרה אינה מתייחסת לייצוג המערכת, והיא כללית לחלוטין.

כמובן שאם המערכת מוגדרת דרך פונקצית תמסורת, מכיוון שפונקצית תמסורת מוגדרת רק בתחום ההתכנסות, יש לשים לב האם יש תחום התכנסות משותף לשתי המערכות. זאת כדי שתהיה משמעות לחיבור המערכות.

לפונקציית תמסורת רציונלית מתקיים

$$H^{-1}(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{1}{\frac{N(s)}{D(s)}} = \frac{D(s)}{N(s)}\,. \tag{6.3.26}$$

6.4 התמרת לפלס חד צדדית

התמרת לפלס חד צדדית היא ההתמרה המופיעה בקורס "טורי פוריה והתמרות אינטגרליות."

הגדרה 6.4.1 התמרת לפלס חד צדדית של האות x מוגדרת עבור ערכים של s כך ש-

$$\int_{0^-}^{\infty} |x(t)| e^{-(\Re e\, s)t}\, dt < \infty\,. \tag{6.4.1}$$

ואז ההתמרה היא

$$X_+(s) \doteq \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st}\, dt\,. \tag{6.4.2}$$

תחום ההגדרה (*ROC: region of convergence*) הוא אוסף הערכים של s עבורם ההתמרה מוגדרת. נסמן את הקשר בין x להתמרה X_+ כך:

$$x \overset{\mathcal{L}_+}{\leftrightarrow} X_+\,, \quad X_+(s) = \mathcal{L}_+[x](s)\,. \tag{6.4.3}$$

משמעות הגבול התחתון 0^- באינטגרל היא שאנו כוללים קטע---קטן באופן שרירותי---משמאל ל-0. זאת על מנת לכלול השפעה של פונקציות מוכללות כגון דלתה. תנאי התחלה אם יש יקבעו עבור נזמן 0, וכניסה של אות כלשהו סביב אפס מוגדרת היטב. ניתן להגדיר התמרה המתחילה ב-0^+, אולם אנו לא נעשה זאת. עבור אותות רגילים (לא מוכללים), ברור ש-

$$\mathcal{L}_+ x = \mathcal{L}[x \cdot u]\,. \tag{6.4.4}$$

מכיוון שכך, לפי תכונות התמרת לפלס (דו צדדית), תחום ההתכנסות של ההתמרה החד צדדית הוא תמיד ימני, כלומר $\Re e\, s > \sigma_0$. מכאן נובעת תכונה חשובה:
לכל שתי התמרות (חד צדדיות) יש תחום התכנסות משותף.

מסיבה זו לא נעסוק במשפטים הבאים בשאלה מהו תחום ההתכנסות של האות המתקבל.

כמובן שהקשר בין אות והתמרתו הוא חד חד ערכי רק עבור אותות ימניים: ההתמרה אינה שומרת כל מידע לגבי ערכי האות עבור זמנים שליליים.

חלק גדול מתכונות ההתמרה החד צדדית אפשר לקבל מתכונות ההתמרה הדו צדדית.

משפט 6.4.2 ההתמרה היא פעולה לינארית, כלומר

$$\alpha x + \beta y \overset{\mathcal{L}_+}{\leftrightarrow} \alpha X + \beta Y \tag{6.4.5}$$

עבור אותות ימניים x, y,

$$x * y \overset{\mathcal{L}_+}{\leftrightarrow} X_+(s) Y_+(s)\,. \tag{6.4.6}$$

עבור אותות שאינם בהכרח ימניים מתקיים

$$(x \cdot u) * (y \cdot u) \overset{\mathcal{L}_+}{\leftrightarrow} X_+(s) Y_+(s)\,. \tag{6.4.7}$$

הוכחה: התכונות נובעות מאילו של ההתמרה הדו צדדית. מ.ש.ל.

התמרת לפלס חד צדדית של דלתה מוזזת היא

$$\mathcal{L}_+[\delta(t-a)](s) = \int_{0^-} e^{-st}\delta(t-a)\,dt = e^{-sa} \tag{6.4.8}$$

אם $a \geq 0$ ושווה 0 אם $a < 0$. נזכר כי ניתן לייצג השהיה דרך קונוולוציה עם דלתה מוזזת.

משפט 6.4.3 עבור $a \geq 0$,

$$x(t-a) \overset{\mathcal{L}_+}{\leftrightarrow} e^{-sa} X_+(s)\,. \tag{6.4.9}$$

הוכחה: נובע מתכונות ההתמרה הדו צדדית. מ.ש.ל.

נשים לב כי אם x איננו אות חד צדדי, לא ניתן לשחזר את ערכיו עבור t שלילי מתוך $X_+(s)$. לכן תכונת ההזזה יכולה להיות תקיפה רק עבור $a \geq 0$.

מתכונות ההתמרה הדו צדדית נובע מייד כי לכל s_0 מרוכב,

$$e^{s_0 t} x(t) \overset{\mathcal{L}_+}{\leftrightarrow} X_+(s - s_0)\,. \tag{6.4.10}$$

התמרת לפלס חד צדדית מתאימה במיוחד לחישוב פתרונות של מד"ר לינאריות, עם תנאי התחלה. זאת מהסיבה הבאה.

משפט 6.4.4 אם $x(t)e^{-st} \to 0$ כאשר $t \to \infty$ אזי

$$\frac{d}{dt}x \overset{\mathcal{L}_+}{\leftrightarrow} sX_+(s) - x(0^-)\,. \tag{6.4.11}$$

כלומר תנאי ההתחלה באים לידי ביטוי בהתמרה החד צדדית, בניגוד למצב בהתמרה דו צדדית.

הוכחה:

$$\mathcal{L}_+\left[\frac{d}{dt}x\right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{d}{dt}x(t)e^{-st}\,dt \tag{6.4.12}$$

אינטגרציה בחלקים

$$= x(t)e^{-st}\Big|_{0-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} x(t)\frac{d}{dt}e^{-st}\,dt \tag{6.4.13}$$

$$= -x(0-) + s\int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt \tag{6.4.14}$$

בגלל תנאי ההתכנסות, וזוהי התוצאה. מ.ש.ל.

על ידי שימוש חוזר בנוסחה זו נקבל (תחת תנאי התכנסות)

$$\frac{d^n}{dt^n}x \overset{\mathcal{L}_+}{\leftrightarrow} s^nX_+(s) - s^{n-1}x(0^-) - s^{n-2}x^{(1)}(0^-) - \ldots - sx^{(n-2)}(0^-) - x^{(n-1)}(0^-) \tag{6.4.15}$$

$$= s^nX_+(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}x^{(k-1)}(0^-)\,. \tag{6.4.16}$$

התמרה חד צדדית של מדרגה זהה כמובן להתמרה הדו צדדית. מכאן נובע מיד

משפט 6.4.5 התמרה של אינטגרל לא מסויים:

$$\int_{0^-}^{t} x(\tau)\,d\tau \overset{\mathcal{L}_+}{\leftrightarrow} \frac{X_+(s)}{s}\,. \tag{6.4.17}$$

הוכחה: זהה להוכחה למקרה הדו צדדי. מ.ש.ל.

משפט 6.4.6 גזירה במשתנה s:

$$-tx(t) \overset{\mathcal{L}_+}{\leftrightarrow} \frac{d}{ds}X(s)\,. \tag{6.4.18}$$

הוכחה: זהה למקרה הדו צדדי. מ.ש.ל.

משפט 6.4.7 שינוי סקלה: עבור $\alpha \geq 0$

$$x(\alpha t) \overset{\mathcal{L}_+}{\leftrightarrow} \frac{1}{\alpha}X_+\left(\frac{s}{a}\right)\,. \tag{6.4.19}$$

הוכחה: זהה להתמרה הדו צדדית. כמובן שלא ניתן להשתמש ב-a שלילי. מ.ש.ל.

משפטי הערך ההתחלתי והסופי קושרים את הערך של האות הזמני באפס עם ערך ההתמרה ב-s גדול, ולהיפך.

משפט 6.4.8 עבור אות ימני ללא נקודות סינגולריות בראשית או באינסוף, אם הגבולות הבאים קיימים אזי הם שווים:

ערך התחלתי

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} [sX_+(s)] \;, \tag{6.4.20}$$

ערך סופי

$$x(\infty) = \lim_{s\to 0} [sX_+(s)] \;. \tag{6.4.21}$$

דוגמה 6.4.9 עבור האות $x(t) = e^{-at}u(t)$ כאשר $a > 0$ הערך ההתחלתי הוא כמובן $e^0u(0^+) = 1$ והערך הסופי הוא 0. במישור לפלס, אם נשתמש במשפט,

$$X_+(s) = \frac{1}{s+a} \tag{6.4.22}$$

$$\lim_{s\to\infty} \frac{s}{s+a} = 1 = x(0^+) \tag{6.4.23}$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{s}{s+a} = 0 = x(\infty)\,. \tag{6.4.24}$$

לא נוכיח משפט זה, אך באופן אינטואיטיבי ננסה להבין את מהותו. נבחן את הפונקציה $z(t) = se^{-st}$. נשים לב כי

$$sX_+(s) = s\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}x(t)\,dt = \int_{0^-}^{\infty} z(t)x(t)\,dt\,. \tag{6.4.25}$$

השטח מתחת לפונקציה z הוא 1:

$$\int_{0^-}^{\infty} se^{-st}\,dt = 1\,, \tag{6.4.26}$$

ועבור $s \to \infty$ רוב הפונקציה מרוכזת סביב הראשית (למעשה מימין לראשית). כלומר זהו קירוב לפונקצית דלתה, ובפרט קיבלנו את הערך ההתחלתי ב-0^+.

עבור הערך הסופי, מצד אחד

$$\mathcal{L}_+\left[\frac{dx}{dt}\right](s) = sX_+(s) - x(0^-) \tag{6.4.27}$$

מתכונת הגזירה. מצד שני,

$$\lim_{s\to 0}\mathcal{L}_+\left[\frac{dx}{dt}\right](s) = \lim_{s\to 0}\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\frac{dx}{dt}(t)\,dt \tag{6.4.28}$$

$$= \int_{0^-}^{\infty}\frac{dx}{dt}(t)\,dt \tag{6.4.29}$$

$$= x(\infty) - x(0^-)\,. \tag{6.4.30}$$

משתי המשוואות האחרונות נקבל

$$\lim_{s\to 0} sX_+(s) - x(0^-) = x(\infty) - x(0^-) \tag{6.4.31}$$

$$\lim_{s\to 0} sX_+(s)) = x(\infty)\,. \tag{6.4.32}$$

6.5 נתוח מד"ר על ידי לפלס חד צדדי

ראינו כי כאשר אנו מתייחסים למד"ר כמערכת כניסה יציאה, ניתן לקבל את תגובת ההלם דרך התמרת לפלס דו צדדית: חישוב פונקצית התמסורת הוא מיידי מהמשוואה, ועל ידי התמרה הפוכה נקבל את תגובת ההלם. התמרת לפלס חד צדדית מאפשרת ניתוח מפורט יותר, הכולל את השפעת תנאי ההתחלה.

נתבונן שוב במד"ר בצורתה הסטנדרטית

$$\sum_{n=0}^{N} a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m\frac{d^m x(t)}{dt^m} \tag{6.5.1}$$

כאשר נתונים תנאי התחלה באפס:

$$y(0^-), y^{(1)}(0^-), y^{(2)}(0^-), \ldots, y^{(N-2)}(0^-), y^{(N-1)}(0^-). \tag{6.5.2}$$

נבצע התמרה חד צדדית על שני צידי המשוואה ונקבל, בעזרת תכונת הלינאריות והנוסחה (6.4.15) עבור התמרה של נגזרת

$$\mathcal{L}_+\left(\sum_{n=0}^{N} a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right)(s) = \sum_{n=0}^{N} a_n\mathcal{L}_+\left(\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right)(s) \tag{6.5.3}$$

$$= a_0 Y_+(s) + \sum_{n=1}^{N} a_n\left(s^n Y_+(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} y^{(k-1)}(0^-)\right) \tag{6.5.4}$$

$$= Y_+(s)\sum_{n=0}^{N} a_n s^n - \sum_{n=1}^{N} a_n\left(\sum_{k=1}^{n} s^{n-k} y^{(k-1)}(0^-)\right)\,. \tag{6.5.5}$$

בצורה דומה

$$\mathcal{L}_+\left(\sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}\right)(s) = \sum_{m=0}^{M} b_m \mathcal{L}_+\left(\frac{d^m x(t)}{dt^m}\right)(s) \tag{6.5.6}$$

$$= b_0 X_+(s) + \sum_{m=1}^{M} b_m \left(s^m X_+(s) - \sum_{k=1}^{m} s^{m-k} x^{(k-1)}(0^-)\right) \tag{6.5.7}$$

$$= X_+(s) \sum_{m=0}^{M} b_m s^m - \sum_{m=0}^{M} b_m \left(\sum_{k=1}^{m} s^{m-k} x^{(k-1)}(0^-)\right) . \tag{6.5.8}$$

את השוויון

$$\mathcal{L}_+\left(\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n}\right)(s) = \mathcal{L}_+\left(\sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}\right)(s) \tag{6.5.9}$$

ניתן לכן לכתוב כך

$$Y_+(s) \sum_{n=0}^{N} a_n s^n = X_+(s) \sum_{m=0}^{M} b_m s^m + \sum_{n=1}^{N} a_n \left(\sum_{k=1}^{n} s^{n-k} y^{(k-1)}(0^-)\right) - \sum_{m=1}^{M} b_m \left(\sum_{k=1}^{m} s^{m-k} x^{(k-1)}(0^-)\right) \tag{6.5.10}$$

$$Y_+(s) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m s^m}{\sum_{n=0}^{N} a_n s^n} X_+(s) + \frac{\sum_{n=1}^{N} a_n \left(\sum_{k=1}^{n} s^{n-k} y^{(k-1)}(0^-)\right)}{\sum_{n=0}^{N} a_n s^n} - \frac{\sum_{m=1}^{M} b_m \left(\sum_{k=1}^{m} s^{m-k} x^{(k-1)}(0^-)\right)}{\sum_{n=0}^{N} a_n s^n} \tag{6.5.11}$$

האיבר הראשון אינו אלא $H(s)X_+(s)$: כלומר זוהי התגובה המתקבלת מקונוולוציה עם תגובת ההלם של המערכת (של המד"ר). האיבר השני הוא בדיוק התגובה בכניסה אפס, כלומר Y_{ZIR}. אם כן, התמרת לפלס החד צדדית נותנת לנו כלי לחישוב התגובה הכללית של מערכת המתוארת על ידי מד"ר---כסכום של תגובה לתנאי התחלה ותגובה לכניסה.